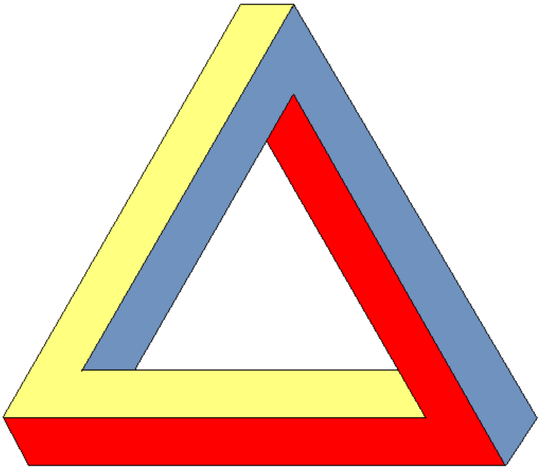
Bernadin Ibrahimpašić



ELEMENTARNA MATEMATIKA

UDŽBENICI UNIVERZITETA U BIHAĆU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM BIHIGIENSIS

Bernadin Ibrahimpašić

ELEMENTARNA MATEMATIKA

Bihać, 2014.

ELEMENTARNA MATEMATIKA

Recenzenti
prof. dr. sc. Karmelita Pjanić - Lipovača
Univerzitet u Bihaću

prof. dr. sc. Duško Jojić
Univerzitet u Banjoj Luci

doc. dr. sc. Dževad Burgić
Univerzitet u Zenici

Izdavač
Pedagoški fakultet Bihać

- -

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

51(075.8)

IBRAHIMPAŠIĆ, Bernadin
Elementarna matematika [Elektronski izvor] /
Bernadin Ibrahimpašić. – El. knjiga. – Bihać :
Pedagoški fakultet, cop. 2014

Način dostupa (URL):
http://pfb.ba/wp-content/uploads/2014/09/Bernadin-Ibrahimpasic-Elementarna-matematika.pdf. – Nasl.
sa nasl. ekrana. – Izvor opisan dana 08.12.2014.

ISBN 978–9958–594–19–9

COBISS.BH–ID 21755142

- -

Odlukom Senata Univerziteta u Bihaću broj: 06 – 8003/2014 od 1.12.2014. godine knjizi pod naslovom "Elementarna matematika", autora Bernadina Ibrahimpašića, se dodjeljuje status univerzitetskog udžbenika.

Amini i Hani

Predgovor

Knjiga je podijeljena u sedam poglavlja. Prvenstveno je namijenjena studentima prve godine matematičkih fakulteta, koji dolaze iz različitih srednjih škola, s ciljem da se što bolje pripreme za studij matematike.

Recenzenti ove knjige, prof. dr. sc. Karmelita Pjanić – Lipovača, prof. dr. sc. Duško Jojić i doc. dr. sc. Dževad Burgić su savjetima i sugestijama pomogli da knjiga dobije konačan izgled. Ovom im se prilikom zahvaljujem.

Na naslovnoj strani se nalazi *nemogući* ili *Penrouzov trougao*, koji se još naziva i *tri–bar*. Prvobitno ga je 1934. godine nacrtao švedski umjetnik Oscar Reutersvärd (1915 – 2002). Popularizirali su ga 1958. godine otac i sin, Lionel Sharples i Roger Penrose, te je po njima i dobio ime. Lionel Sharples Penrose (1898 – 1972) je bio engleski psihijatar i matematičar, a Roger Penrose (1931 –) je engleski matematičar.

Bosanska Krupa, oktobar 2014. Bernadin Ibrahimpašić

Sadržaj

Poglavlje 1

Djeljivost

U matematici se, kao i u svakoj drugoj nauci, pored riječi i izraza iz svakodnevnog života, čije nam je značenje poznato, koristimo i raznim stručnim riječima i izrazima čije nam značenje nije poznato. Takve riječi i izraze treba objasniti pomoću drugih poznatih i jednostavnijih pojmova. To su tzv. **osnovni** (**primitivni**) **pojmovi** i oni se ne definiraju. Osim osnovnih pojmova postoje i **definirani pojmovi** koji se definiraju (opisuju) pomoću osnovnih i prethodno definiranih pojmova. **Definicija** je (uglavnom) rečenica kojom uvodimo novi pojam i sastoji se iz dva dijela. Jedan dio je onaj koji se definira i naziva se **definiendum**, a drugi je onaj kojim se definira i naziva se **definiens**. Tako je u definiciji "*Paralelogram je četverougao kojem su suprotne stranice paralelne.*" definiendum *paralelogram*, a definiens je *četverougao kojem su suprotne stranice paralelne*. Napomenimo još da je definicija **genetička** ako izražava način nastanka pojma koji definira, a **suštinska** ako se u njoj navode bitna svojstva pojma koji se definira. Kako postoje pojmovi koje ne možemo definirati, tako postoje i tvrdnje koje ne možemo dokazati. Takvu tvrdnju nazivamo **aksiom**. To je vrlo jednostavna tvrdnja koju moramo prihvatiti bez dokaza.

Još od Euklida (pretpostavlja se da je rođen oko 330. god. pr.n.e. a da je umro oko 275. god. pr.n.e.) i njegovih *Elemenata* napisanih u 13 knjiga, svaka se matematička disciplina nastoji izgraditi prema uzoru na Euklidovu geometriju. Princip je da se polazi od jednostavnih pojmova koji se ne definiraju (osnovni pojmovi) i tvrdnji koje se ne dokazuju (aksiomi), a da se svaki novi pojam (koji nije osnovni) definira pomoću poznatih (osnovnih i prethodno definiranih) pojmova, te da se svaka nova tvrdnja (koja nije aksiom) dokazuje pomoću aksioma i prethodno dokazanih tvrdnji. Takav način izgradnje je **deduktivan**, jer ostale pojmove koje definiramo i tvrdnje koje dokazujemo izvodimo logičkim zaključivanjem iz osnovnih pojmova i aksioma. Za razliku od dedukcije, koja je metoda gdje se iz općih principa koje smo prihvatili izvode pojedinačni zaključci, **indukcija** je metoda kojom posmatrajući pojedine slučajeve otkrivamo opća svojstva. Indukcija ima veliko značenje u izgradnji matematike, jer nam pomaže da dođemo do osnovnih pojmova i aksioma, ali je njena slabost u tome što ona ne obuhvata sve pojedinačne slučajeve nego samo odabrane.

Teorem je tvrdnja čija se istinitost dokazuje, tj. izvodi logičkim zaključivanjem iz definicija, aksioma i već dokazanih tvrdnji. U formulaciji teorema se mogu razlikovati dva dijela i to **pretpostavka** i **tvrdnja** (**teza**). U pretpostavci se navode uvjeti pod kojim treba da vrijedi ono što se tvrdi u tvrdnji. Kada kažemo "*Ako je x paran broj, onda je i njegov kvadrat paran broj.*" onda je pretpostavka da je x paran broj. Tvrdnja za koju postoji jednostavan i kratak dokaz se naziva **propozicija**. Tvrdnja koja sama za sebe i nije od nekog posebnog interesa, nego služi kao pomoćna tvrdnja u dokazu važnije i složenije tvrdnje, se naziva **lema**. Tvrdnja koja je jednostavna i neposredno slijedi iz neke upravo dokazane tvrdnje se naziva **korolar** (**posljedica**). Dokaz korolara je, uglavnom, toliko očigledan da se najčešće izostavlja.

Svaka matematička disciplina koja je izgrađena na opisani način predstavlja **aksiomatski sistem** ili **aksiomatsku teoriju**, tj. kažemo da je ona izgrađena **aksiomatskim pristupom**.

1.1 Izjave i kvantifikatori

Definicija 1.1. ***Iskaz*** (***izjava, sud***) *je svaka izjavna rečenica koja ima smisla i koja može biti samo istinita ili lažna.*

Tako je, na primjer, rečenica "*Danas je ponedjeljak.*" iskaz, jer možemo ustanoviti da li je ona lažna ili istinita, dok rečenica "*Ponedjeljak.*" nije iskaz, jer ne možemo ustanoviti da li je ona lažna ili istinita. Iz definicije je vidljivo da upitna rečenica ne može biti iskaz.

Svaki iskaz ima svoju **istinitosnu vrijednost** koja može biti **istina** (**tačno**) ili **laž** (**neistina, netačno**). Oznaka za istinitosnu vrijednost iskaza koji je tačan je 1 ili $\top$ (čita se "*te*"), dok je oznaka za istinitosnu vrijednost iskaza koji je lažan 0 ili $\perp$ (čita se "*ne te*").

Iskaze označavamo malim pisanim slovima engleskog alfabeta $(p, q, r, s, \ldots)$.

Ako je iskaz p istinit, onda to zapisujemo $\tau(p) = 1$ ili $\tau(p) = \top$. Analogno tome, ako je iskaz q lažan onda to zapisujemo $\tau(q) = 0$ ili $\tau(q) = \perp$. Treba napomenuti da se oznaka τ često izostavlja ukoliko je iz konteksta jasno o čemu se govori.

Definicija 1.2. ***Negacija*** *iskaza p je iskaz $\neg p$ koji je istinit ako i samo ako je iskaz p lažan.*

Negacija iskaza p, u oznaci $\neg p$, se čita: "*nije p*", "*ne p*" ili "*non p*".

Definicija 1.3. ***Konjunkcija*** *iskaza p i iskaza q je složen iskaz $p \wedge q$, koji je istinit samo u slučaju kada su i iskaz p i iskaz q istiniti.*

Konjunkcija iskaza p i iskaza q, u oznaci $p \wedge q$, se čita: "*p i q*" ili "*p et q*".

Definicija 1.4. ***Disjunkcija*** *iskaza p i iskaza q je složen iskaz $p \vee q$, koji je istinit ako je bar jedan od iskaza p i iskaza q istinit.*

Disjunkcija iskaza p i iskaza q, u oznaci $p \vee q$, se čita: "*p ili q*" ili "*p vel q*".

Upravo navedena disjunkcija se naziva još i **uključiva** ili **inkluzivna disjunkcija**, jer je ovdje, za razliku od svakodnevne upotrebe veznika *ili*, vrijednost iskaza $p \vee q$ istinita i u slučaju kada su oba iskaza, i p i q, tačni. Svakodnevna upotreba veznika *ili* ima isključiv smisao, jer se kod istinitosti iskaza *p ili q* podrazumijeva da je samo jedan od iskaza p i q tačan. To je tzv. **isključiva** ili **ekskluzivna disjunkcija**. Njena oznaka je $p \veebar q$ i čita se "*ili p ili q*". Iskaz $p \veebar q$ je istinit samo u slučaju kada je tačno jedan od iskaza p i q tačan.

Definicija 1.5. ***Implikacija*** *iskaza p i iskaza q je složen iskaz $p \Rightarrow q$, koji je lažan samo u slučaju kada je iskaz p istinit, a iskaz q lažan.*

Implikacija iskaza p i iskaza q, u oznaci $p \Rightarrow q$, se čita: "*p povlači q*", "*p implicira q*" ili "*ako je p onda je q*". U ovom slučaju kažemo da je p **dovoljan** uvjet za q, a da je q **nužan** (**potreban**) uvjet za p.

Definicija 1.6. ***Ekvivalencija*** *iskaza p i iskaza q je složen iskaz $p \Leftrightarrow q$, koji je istinit ako iskaz p i iskaz q imaju istu istinitosnu vrijednost.*

Ekvivalencija iskaza p i iskaza q, u oznaci $p \Leftrightarrow q$, se čita: "*p je ekvivalentno q*", "*p je jednakovrijedno kao i q*", "*p je ako i samo ako je q*", "*p je onda i samo onda kada je q*". U ovom slučaju kažemo da je p **nužan i dovoljan** uvjet za q.

Istinitosne vrijednosti navedenih iskaza se vrlo jednostavno mogu prikazati pomoću **istinitosne tablice** (**tablice istinitosti**) na sljedeći način.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

U matematičkoj terminologiji se vrlo često koriste riječi *svaki* i *neki* koje se nazivaju **kvantifikatori** ili **kvantori**. Zbog što jednostavnijeg pisanja uvedene su i posebne oznake za kvantifikatore. Tako postoje **univerzalni kvantifikator** $\forall$ (svaki, ma koji, bilo koji, ...) i **egzistencijalni kvantifikator** $\exists$ (postoji, neki, bar jedan, ...). Ukoliko je izbor jedinstven tada se egzistencijalni kvantifikator označava s $\exists!$ (postoji tačno jedan, postoji jedan i samo jedan).

1.2 Skupovi

Skup se smatra osnovnim nedefiniranim matematičkim pojmom. Pod pojmom skupa podrazumijevamo neku cjelinu (kolekciju) određenih objekata. Ti objekti, koji čine skup, se nazivaju **elementima** tog skupa i mogu biti nabrojani pojedinačno ili opisani nekom zajedničkom osobinom. Skupove ćemo označavati velikim štampanim slovima engleskog alfabeta. Ukoliko je riječ o skupovima brojeva, onda za njih koristimo standardne oznake: $\mathbb{N}$ (prirodni brojevi), $\mathbb{Z}$ (cijeli), $\mathbb{Q}$ (racionalni), $\mathbb{I}$ (iracionalni), $\mathbb{R}$ (realni) i $\mathbb{C}$ (kompleksni).

Istaknimo da za svaki objekt x nastupa tačno jedna od sljedeće dvije mogućnosti, i to x je element skupa A, tj. x pripada skupu A, u oznaci $x \in A$ ili x nije element skupa A, tj. x ne pripada skupu A, u oznaci $x \notin A$.

Činjenica kojom se ističe odnos skupa i njegovih elemenata je vrlo bitna, jer je svaki skup potpuno određen svojim elementima. To znači da su dva skupa A i B **jednaki**, u oznaci $A = B$, ako i samo ako su sastavljeni od jednakih elemenata, što zapisujemo

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall x)(x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B).$$

Sam pojam zadavanja skupa je vezan za način opisivanja pripadnosti određenog objekta tom skupu. Skup možemo zadati na sljedeći način:

- Popisivanjem svih njegovih elemenata;

$$A = \{a, 5, -2, x\}$$

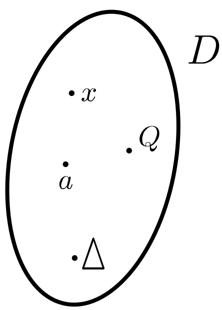
- Zapisivanjem samo nekoliko elemenata skupa, ukoliko je iz toga jasno koji su sve elementi tog skupa;

$$B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

- Zadavanjem nekog karakterističnog svojstva koje je zajedničko za sve elemente skupa;

$$C = \{x : x < 25, x \in \mathbb{N}\}$$

- Pomoću Vennovog dijagrama.



Korisno je među skupovima posmatrati i skup koji nema elemenata. Takav se skup naziva **prazan skup** i označava simbolom $\emptyset$. Ponekad se za prazan skup koristi i oznaka $\{\ \}$. Ipak, treba napomenuti da su skupovi $A = \emptyset$ i $B = \{\ \}$ prazni skupovi, dok skup $C = \{\emptyset\}$ nije prazan skup, nego je to skup koji ima jedan element (njegov element je prazan skup). Kako je za dva skupa koji nemaju elemenata formalno tačna desna strana ekvivalencije koja govori o jednakosti skupova, to imamo da postoji samo jedan prazan skup.

Ako su A i B skupovi sa svojstvom da je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda kažemo da je skup A **podskup** skupa B ($A \subseteq B$), odnosno da je skup B **nadskup** skupa A ($B \supseteq A$). Relaciju $\subseteq$ nazivamo **inkluzija** i pišemo

$$A \subseteq B \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall x)(x \in A \;\Rightarrow\; x \in B).$$

Ako je skup A podskup skupa B, ali A nije jednako B, onda kažemo da je skup A **pravi podkup** skupa B ($A \subset B$), odnosno da je skup B **pravi nadskup** skupa A ($B \supset A$), tj.

$$A \subset B \qquad \Leftrightarrow \qquad ((\forall x)(x \in A \;\Rightarrow\; x \in B) \wedge (\exists y)(y \notin A, y \in B)).$$

Napomenimo da za svaki skup A vrijede sljedeće dvije inkluzije i to

$$\emptyset \subseteq A \qquad \text{i} \qquad A \subseteq A.$$

Za dani skup A možemo posmatrati skup svih njegovih podskupova, u oznaci $\mathcal{P}(A)$, koji se naziva **partitivni skup** skupa A. Prema prethodno rečenom imamo da partitivni skup ne može nikada biti prazan. Ako skup A ima n elemenata, onda njegov partitivni skup ima 2^n elemenata.

Primjer 1.1. *Ako je $A = \{a, \triangle\}$ i $B = \emptyset$, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{\triangle\}, \{a, \triangle\}\}\,, \\
\mathcal{P}(B) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,, \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{\triangle\}\}, \{\{a, \triangle\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{\triangle\}\}, \\
&\quad \{\emptyset, \{a, \triangle\}\}, \{\{a\}, \{\triangle\}\}, \{\{a\}, \{a, \triangle\}\}, \{\{\triangle\}, \{a, \triangle\}\}, \\
&\quad \{\emptyset, \{a\}, \{\triangle\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, \triangle\}\}, \{\emptyset, \{\triangle\}, \{a, \triangle\}\}, \\
&\quad \{\{a\}, \{\triangle\}, \{a, \triangle\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{\triangle\}, \{a, \triangle\}\}\}\,, \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\,.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Pojam podskupa se koristi i u definiciji jednakosti dvaju skupova. Tako za dva skupa A i B kažemo da su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Provjerom istinitosti ovih dviju inkluzija se provjerava ili dokazuje jednakost dvaju skupova.

Za svaka dva dana skupa A i B se pomoću skupovnih operacija mogu formirati novi skupovi.

Definicija 1.7. *Neka su A i B dani skupovi.*

1. *Pod* ***unijom*** *skupova A i B podrazumijevamo skup $A \cup B$ čiji elementi imaju svojstvo da pripadaju bar jednom od skupova A i B.*

$$A \cup B = \{x \,:\, x \in A \vee x \in B\}$$

2. *Pod* ***presjekom*** *skupova A i B podrazumijevamo skup $A \cap B$ čiji elementi imaju svojstvo da pripadaju i skupu A i skupu B.*

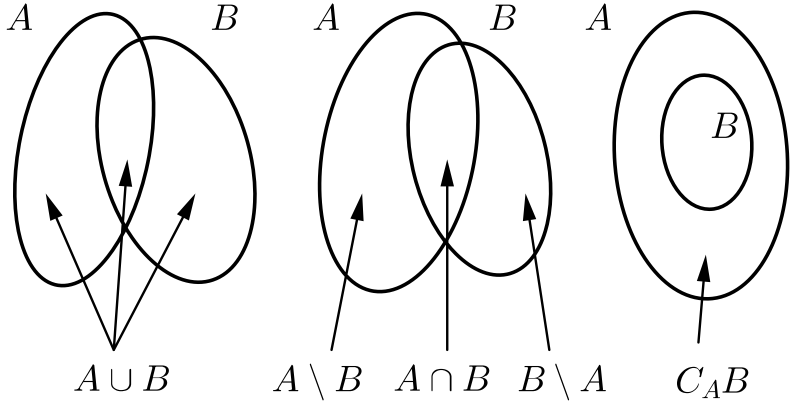
$$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \wedge x \in B\}$$

3. *Pod* ***razlikom*** *skupova A i B podrazumijevamo skup $A \setminus B$ koji se sastoji od onih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B.*

$$A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

4. *Ako je $B \subseteq A$, onda razliku $A \setminus B$ nazivamo* ***komplement*** *skupa B u odnosu na skup A i označavamo s*

$$C_A B.$$



U nekim razmatranjima se ograničavamo samo na skupove koji su sadržani u nekom zadanom skupu $\mathcal{U}$. U tom slučaju se skup $\mathcal{U}$ naziva **univerzalni skup**, a komplement skupa A u odnosu na skup $\mathcal{U}$ jednostavno označavamo s A^C.

Primjer 1.2. *Neka je* $A = \{3,5\}, B = \{1,3,5,a,x\}$ *i* $C = \{5,10,15\}$. *Tada je:*

$A \cup B = \{3,5,1,a,x\}$, $A \cap C = \{5\}$,
$C \setminus B = \{10,15\}$, $C_B A = \{1,a,x\}$.

$C_A B$ *nije moguće odrediti jer skup* B *nije podskup skupa* A.

$\diamondsuit$

Napomenimo da za skupove A i B koji nemaju zajedničkih elemenata, tj. za koje je $A \cap B = \emptyset$, kažemo da su **disjunktni**.
Istaknimo da za svaka dva skupa A i B vrijedi:

1. $A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A;$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A;$
3. $B \subseteq A \;\Rightarrow\; A \cup B = A, \quad A \cap B = B;$
4. $B \subseteq A \;\Rightarrow\; B \cup C_A B = A, \quad B \cap C_A B = \emptyset;$
5. $C_A A = \emptyset, \quad C_\emptyset A = A, \quad \left(A^C\right)^C = A, \quad (x \in A^C \;\Leftrightarrow\; x \notin A).$

Osim toga imamo da su unija i presjek skupova komutativne i asocijativne operacije, te da su međusobno povezane zakonom distributivnosti i De Morganovim formulama.
Neka su A, B, C bilo koji skupovi. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. zakoni asocijacije

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2. zakoni komutacije

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

3. zakoni distribucije

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. De Morganovi zakoni (formule)
   $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
   $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Napomenimo da je $\{a, a\} = \{a\}$, ali da nije $\{a\} = a$, jer na lijevoj strani imamo jednočlani skup a na desnoj strani uopće nemamo skup. Ako za proizvoljne objekte a i b posmatramo skupove $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$, onda vrijedi da su ta dva skupa jednaka. To nije slučaj s **uređenim parom**. Kod uređenog para (a, b), kod kojeg se a i b redom nazivaju **prva** i **druga komponenta**, je poredak bitan. Tako imamo da je

$$(a, b) = (c, d) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c \ \wedge \ b = d.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $(a, b) = (b, a) \ \Leftrightarrow \ a = b$. Analogno uređenom paru se definira i uređena trojka (a, b, c) i uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Za proizvoljne skupove A i B postoji skup čiji su elementi svi uređeni parovi (a, b) kod kojih je prva komponenta iz skupa A a druga komponenta iz skupa B.

Definicija 1.8. *Za zadane skupove A i B skup*

$$A \times B = \{(a, b) \, : \, a \in A, b \in B\},$$

*tj. skup svih uređenih parova kod kojih je prva komponenta iz skupa A a druga komponenta iz skupa B, se naziva **Dekartov** ili **Kartezijev** ili **direktni proizvod** skupova A i B.*

Dekart (Rene Descartes, 31.3.1596. – 11.2.1650.) je bio francuski filozof, fizičar i matematičar, čija je jedna od najpoznatijih izreka "*Mislim, dakle postojim.*". Rođen je u francuskom selu La Haye u departmanu d'Indre-et-Loire. Danas se to selo zove Descartes. Dekartov proizvod skupova se naziva također i Kartezijev proizvod skupova, prema Dekartovom latiniziranom imenu Cartesius.
Kartezijevo množenje, za koje se koristi i naziv direktno množenje, nije općenito komutativno. Tako za skupove $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$ imamo da je

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\},$$

iz čega zaključujemo da je

$$A \times B \neq B \times A.$$

Kod Kartezijevog proizvoda $A \times B$ se skupovi A i B nazivaju **faktori** Kartezijevog proizvoda.

Kartezijev proizvod se može i generalizirati na slučaj kada su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilo koji skupovi. Tada je

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}.$$

Njegovi elemeni su uređene n-torke, kod kojih je i-ta komponenta iz skupa A_i. Kartezijev proizvod se slično definira i kada imamo prebrojivo mnogo faktora. U tom slučaju imamo nizove umjesto uređenih n-torki. Također se Kartezijev proizvod može definirati kada imamo neprebrojivo faktora, ali u tom slučaju proizvod predstavljaju preslikavanja.

Kartezijev proizvod $A \times B$ je prazan skup ako i samo ako je bar jedan od skupova A i B prazan. U slučaju kada je $A = B$, onda skup $A \times A$ označavamo s

$$A \times A = A^2 = \{(a, b) : a, b \in A\}$$

i nazivamo **Kartezijev kvadrat** skupa A. Za Kartezijev kvadrat definiramo i njegovu **dijagonalu**

$$D(A) = \{(a, a) : a \in A\} \subseteq A^2.$$

Analogno definiciji Kartezijevog kvadrata se definira i n-ta **potencija skupa** A kao

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A\}.$$

Ako su A, B i C bilo koji skupovi, te ako vrijedi da je $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$, onda vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
4. $A \times B \subseteq X \times Y$,
5. $(X \times Y) \setminus (A \times B) = [(X \setminus A) \times Y] \cup [X \times (Y \setminus B)]$.

Elementi nekog skupa A i nekog skupa B mogu biti u nekom međusobnom odnosu, relaciji. U nekim slučajevima nas samo interesira da li su elementi $a \in A$ i $b \in B$ u nekom odnosu (relaciji), a ne i šta ta relacija znači. Posmatrajući na taj način, očigledno je da je svaka relacija među elementima skupa A i skupa B u potpunosti određena podskupom njihovog Kartezijevog proizvoda $A \times B$, ali koji sadrži samo one uređene parove (a, b) kod kojih je element $a \in A$ u toj relaciji s elementom $b \in B$. Nas će interesirati relacije među elementima jednog skupa, tj. podskupovi Kartezijevog kvadrata A^2.

Definicija 1.9. *Neka je A neprazan skup i A^2 njegov Kartezijev kvadrat. Svaki podskup $\rho \subseteq A^2$ tog kvadrata nazivamo* ***relacija*** *(binarna relacija) na skupu A. Analogno tome, svaki podskup skupa A^n, za prirodan broj n, nazivamo* ***n–arna relacija*** *na skupu A.*

Ako za elemente $a, b \in A$ vrijedi da je $(a, b) \in \rho \subseteq A^2$, onda kažemo da je element a **u relaciji** ρ s elementom b i pišemo $a \,\rho\, b$.

Neke relacije označavamo nekim specifičnim (standardnim) simbolima kao što su $\subset, \subseteq, =, <, \leq, >, \geq$, itd.

Primjer 1.3. *Ako je $A = \{1, 3, 4, 7\}$, onda je jedna relacija na skupu A*

$$\rho = \{(3,1), (4,1), (4,3), (7,1), (7,3), (7,4)\} \subseteq A^2,$$

što smo mogli zapisati i kao

$$3\,\rho\,1,\;\; 4\,\rho\,1,\;\; 4\,\rho\,3,\;\; 7\,\rho\,1,\;\; 7\,\rho\,3,\;\; 7\,\rho\,4.$$

Može se primijetiti da je ovdje relacija ρ upravo relacija $>$ ("biti veće").

$\diamondsuit$

Među svim relacijama, od posebnog su interesa one relacije koje posjeduju neka dobra dodatna svojstva.

Definicija 1.10. *Neka je ρ relacija na nepraznom skupu A. Kažemo da je relacija ρ*

- ***refleksivna*** *ako je $(a, a) \in \rho, \forall a \in A$, tj. ako je svaki $a \in A$ u relaciji ρ sa samim sobom,*
- ***simetrična*** *ako iz $(a, b) \in \rho$ slijedi da je $(b, a) \in \rho$,*
- ***antisimetrična*** *ako iz $(a, b) \in \rho$ i $(b, a) \in \rho$ slijedi da je $a = b$,*
- ***tranzitivna*** *ako iz $(a, b) \in \rho$ i $(b, c) \in \rho$ slijedi da je $(a, c) \in \rho$.*

Među relacijama posebno mjesto zauzimaju relacije koje su refleksivne, simetrične i tranzitivne (tzv. RST relacije). Za takve relacije kažemo da su **relacije ekvivalencije**. Relaciju ekvivalencije standardno označavamo simbolom $\sim$. Ukoliko je $a \sim b$, onda kažemo da je element a **ekvivalentan** s elementom b.

Ako je $\sim$ bilo koja relacija ekvivalencije na skupu A, onda skup svih elemenata iz A koji su u toj relaciji ekvivalencije $\sim$ s nekim fiksiranim elementom $a \in A$ nazivamo **klasa ekvivalencije** određena elementom $a \in A$. Taj skup, u oznaci

$$C_a = \{x \in A \, : \, x \sim a\},$$

je podskup skupa A i zbog refleksivnosti relacije ekvivalencije nikada nije prazan, jer je $a \sim a$ pa mora biti $a \in C_a$, $\forall a \in A$. Osim toga, napomenimo da su svake dvije različite klase ekvivalencije disjunktne.

1.3 Skupovi brojeva

Elementi skupova mogu biti bilo koji predmeti ili pojmovi, kako realni tako i apstraktni. Ipak, od svih skupova matematika najčešće proučava dvije posebne vrste skupova, i to skupove brojeva i skupove tačaka. Prvi skup brojeva s kojim se susrećemo je **skup prirodnih brojeva**. To su bili prvi brojevi do kojih je čovječanstvo došlo, a prva namjena im je bila za prebrojavanje. Oznaka mu dolazi od latinske riječi Naturalis.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

Jedna karakterizacija skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je pomoću Peanovih aksioma.

P1. Broj 1 je prirodan broj.

P2. Svaki prirodan broj n ima tačno jednog sljedbenika $n^+ = n + 1$ u skupu prirodnih brojeva.

P3. Uvijek je $n^+ \neq 1$, tj. broj 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja.

P4. Ako je $m^+ = n^+$, onda je $m = n$, tj. ako su sljedbenici dva prirodna broja jednaki, onda su i oni jednaki.

P5. Svaki podskup skupa prirodnih brojeva koji sadrži broj 1 i sljedbenika svakog svog elementa sadrži sve prirodne brojeve.

Peti Peanov aksiom je poznat i kao **princip matematičke indukcije**. Prisjetimo se da se način zaključivanja, koji od posmatranja posebnih (pojedinačnih) slučajeva dovodi do općih zaključaka naziva indukcija. Međutim, u matematici takvo zaključivanje ne mora biti istinito i ono se naziva nepotpuna indukcija. U matematici postoji metoda pomoću koje se može zaključiti da li su postavljene hipoteze u problemima ovog tipa ispravne. Ta se metoda zasniva na principu matematičke ili potpune indukcije. Metodom matematičke indukcije dokazujemo tvrdnje koje ovise o prirodnom broju n, a dokazivanje provodimo u tri koraka.

1. *Baza indukcije:* Dokazujemo (provjeravamo) da li tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n_0 \geq 1$.

2. *Pretpostavka indukcije:* Pretpostavljamo da je tvrdnja istinita za neki prirodan broj k.

3. *Korak indukcije:* Na osnovu pretpostavke indukcije dokazujemo da je tvrdnja istinita za prirodan broj $k+1$.

Kao što nam je poznato, sabiranje i množenje u skupu prirodnih brojeva je uvijek izvodivo, tj. zbir i proizvod svaka dva prirodna broja je prirodan broj. Kažemo da je skup $\mathbb{N}$ **zatvoren** u odnosu na sabiranje i množenje. Međutim, oduzimanje i dijeljenje nije uvijek izvodivo. Tako npr. imamo da nam u skupu prirodnih brojeva nisu poznati rezultati $3-3$, $5-7$ i $3:2$. Zaključujemo da jednačina $x+m=n$, $(m,n \in \mathbb{N})$, ima rješenje u skupu prirodnih brojeva samo u slučaju kada je $m<n$. Zbog toga skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ proširujemo do **skupa cijelih brojeva** $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

Treba istaknuti da proširenja vršimo na način da je polazni skup podskup proširenog skupa, da u proširenom skupu one operacije koje su postojale i u polaznom skupu zadržavaju sve osobine, te da je prošireni skup najmanji skup u kojem je operacija, zbog koje se vrši proširenje, izvodiva.

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je podskup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ali smo ponovo u situaciji da ni u skupu $\mathbb{Z}$, u kojem su izvodive operacije sabiranja, oduzimanja i množenja, nije izvodiva operacija dijeljenja. Tako imamo da jednačina $qx = p$, $(p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0)$, nema uvijek rješenje u skupu cijelih brojeva. Zbog toga skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ proširujemo do **skupa racionalnih brojeva** $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ :\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Skupovi prirodnih, cijelih i racionalnih brojeva su povezani inkluzijom $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, te su u skupu $\mathbb{Q}$ sve četiri osnovne operacije izvodive. Međutim, u skupu racionalnih brojeva korjenovanje nije uvijek moguće. Tako imamo da jednačina $x^2 = 2$ nema rješenja u skupu $\mathbb{Q}$. Tako dolazimo do **skupa iracionalnih brojeva** $\mathbb{I}$ koji nema zajedničkih elemenata sa skupom racionalnih brojeva. Iracionalni brojevi su oni brojevi koji se ne mogu prikazati u obliku razlomka.

$$\mathbb{I} = \left\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, e, \pi, \pm\sqrt{6}, \dots\right\}$$

Primjer 1.4. *Pokazati da broj $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada je $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, gdje je taj razlomak potpuno skraćen, tj. p i q su relativno prosti. Nakon kvadriranja i množenja s q imamo da je $p^2 = 2q^2$, iz čega zaključujemo da je p^2 paran broj. Kako je jedino kvadrat parnog broja paran broj, to zaključujemo da je i broj p paran, pa je $p = 2m,\ m \in \mathbb{N}$.

Sada je $(2m)^2 = 2q^2$, pa nakon kvadriranja i skraćivanja s 2 imamo da je $2m^2 = q^2$, te analogno prethodnom zaključujemo da je i broj q^2 paran, pa samim tim i da je broj q paran, tj. da je $q = 2n,\ n \in \mathbb{N}$. Dobili smo da je $\text{nzd}(p, q) \geq 2$, što je kontradikcija s pretpostavkom da su brojevi p i q relativno prosti, tj. da je $\text{nzd}(p, q) = 1$.

Znači da je naša pretpostavka pogrešna, pa slijedi da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan.

$\diamondsuit$

Primjer 1.5. *Ako je $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ proizvod različitih prostih bojeva, onda broj $\sqrt{a}$ nije racionalan.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. Tada imamo da je $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, gdje je taj razlomak potpuno skraćen, tj. m i n su relativno prosti. Nakon kvadriranja imamo

$$a \cdot n^2 = m^2 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot n^2 = m^2.$$

Imamo da je broj m^2 djeljiv prostim brojem p_1 pa je samim tim i broj m djeljiv s p_1 (ne samo s p_1 nego analogno i s $p_2, p_3, \ldots, p_k$). To znači da za neki prirodan broj m_1 vrijedi $m = p_1 \cdot m_1$, pa dobijamo

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot n^2 = p_1^2 \cdot m_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot n^2 = p_1 \cdot m_1^2.$$

Vidimo da je desna strana djeljiva s p_1, pa je i lijeva strana djeljiva s p_1. Kako su $p_2, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi, to mora biti n^2 djeljivo s p_1, pa samim tim i n mora biti djeljivo s p_1.

Dobili smo da su i m i n djeljivi s p_1, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Zaključujemo da je broj $\sqrt{a}$ iracionalan.

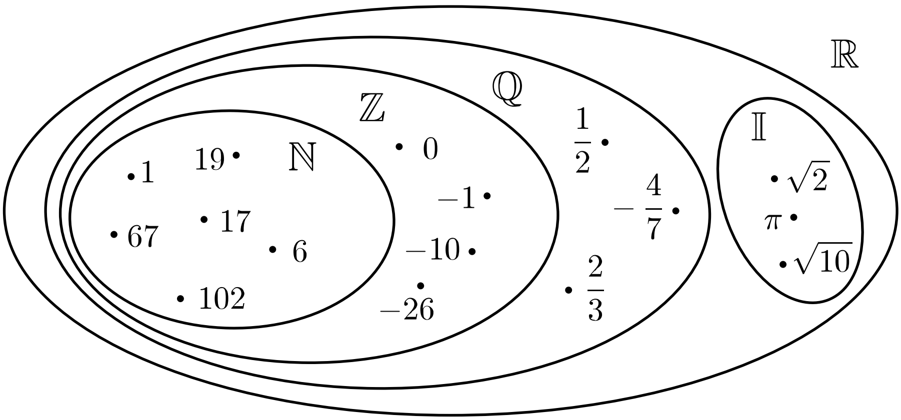
$\diamondsuit$

Posljedica ovoga je da su brojevi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$ iracionalni.

Za razliku od skupa racionalnih brojeva, koji je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, skup iracionalnih brojeva ne posjeduje ta svojstva. Iako su brojevi $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ iracionalni, brojevi $-\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}:\sqrt{2}$ nisu iracionalni. Imamo da ako je a bilo koji iracionalan broj i $b \neq 0$ racionalan broj, onda su i brojevi $-a$, a^{-1}, $a+b$, $a-b$, $b-a$, ab, a/b i b/a iracionalni brojevi.

Unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva daje **skup realnih brojeva** $\mathbb{R}$. Imamo da vrijedi

1. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$,
2. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.



Osim podjele realnih brojeva na racionalne i iracionalne, postoji podjela realnih brojeva na algebarske i transcendentne brojeve.

Definicija 1.11. *Realan broj koji zadovoljava neku jednačinu oblika*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

*se naziva **algebarski**. Broj koji nije algebarski je **transcendentan**.*

Svaki racionalan broj je algebarski. Svaki transcendentan broj je iracionalan. Algebarski broj može biti ili racionalan ili iracionalan. Iracionalan broj može biti ili algebarski ili transcendentan.

Neki od osnovnih podskupova skupa $\mathbb{R}$ su **otvoreni interval** u oznaci (a,b) (ili $\langle a,b\rangle$), **poluotvoreni (poluzatvoreni) interval** u oznaci $(a,b]$ (ili $\langle a,b]$) i $[a,b)$ (ili $[a,b\rangle$), te **zatvoreni interval** ili **segment** u oznaci $[a,b]$.

$$\begin{aligned}
(a,b)=\langle a,b\rangle &= \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}\\
(a,b]=\langle a,b] &= \{x\in\mathbb{R} : a<x\le b\}\\
[a,b)=[a,b\rangle &= \{x\in\mathbb{R} : a\le x<b\}\\
[a,b] &= \{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\}
\end{aligned}$$

Definicija 1.12. *Za neprazan skup $S\subseteq\mathbb{R}$ kažemo da je **odozgo ograničen** skup ako postoji bar jedan realan broj M takav da je $x\le M$ za svako $x\in S$. Svaki broj M s navedenim svojstvom se naziva **majoranta** (**gornja ograda** ili **gornja međa**) skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen, onda kažemo da je **odozgo neograničen**.*

Definicija 1.13. *Najmanja majoranta M nepraznog odozgo ograničenog skupa $S\subseteq\mathbb{R}$ se naziva **supremum** skupa S i označava s $M=\sup S$. Ako je $M\in S$, onda se M naziva **maksimalan** ili **najveći** element skupa S i označava s $M=\max S$.*

Definicija 1.14. *Za neprazan skup $S\subseteq\mathbb{R}$ kažemo da je **odozdo ograničen** skup ako postoji bar jedan realan broj m takav da je $x\ge m$ za svako $x\in S$. Svaki broj m s navedenim svojstvom se naziva **minoranta** (**donja ograda** ili **donja međa**) skupa S. Ako skup S nije odozdo ograničen, onda kažemo da je **odozdo neograničen**.*

Definicija 1.15. *Najveća minoranta m nepraznog odozdo ograničenog skupa $S\subseteq\mathbb{R}$ se naziva **infimum** skupa S i označava s $m=\inf S$. Ako je $m\in S$, onda se m naziva **minimalan** ili **najmanji** element skupa S i označava s $m=\min S$.*

Definicija 1.16. *Za neprazan skup $S\subseteq\mathbb{R}$ kažemo da je **ograničen** ako je ograničen i odozdo i odozgo. U protivnom kažemo da je **neograničen**.*

Skup koji je neograničen može biti odozdo neograničen a odozgo ograničen ili odozdo ograničen a odozgo neograničen ili i odozdo i odozgo neograničen.

U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ su definirane operacije sabiranja i množenja, tj. za svaka dva realna broja $a, b \in \mathbb{R}$ su u potpunosti određeni realni brojevi $a+b, ab \in \mathbb{R}$ koji se nazivaju zbir i proizvod realnih brojeva a i b. U skupu realnih brojeva vrijedi sljedećih 16 aksioma skupa realnih brojeva.

1. Sabiranje je asocijativno, tj.
$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

2. Postoji jedinstven element $0 \in \mathbb{R}$ takav da je
$$x+0 = 0+x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Za svako $x \in \mathbb{R}$ postoji jedinstven element $-x \in \mathbb{R}$ takav da je
$$x+(-x) = -x+x = 0.$$

4. Sabiranje je komutativno, tj.
$$x+y = y+x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Množenje je asocijativno, tj.
$$(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

6. Postoji jedinstven element $1 \in \mathbb{R}$ takav da je
$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ postoji jedinstven element $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ takav da je
$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

8. Množenje je komutativno, tj.
$$xy = yx, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

9. Množenje je distributivno u odnosu na sabiranje (slijeva i zdesna), tj.
$$x(y+z) = xy+xz \qquad \text{i} \qquad (x+y)z = xz+yz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

10. Skup $\mathbb{R}$ je uređen, tj. realni brojevi se mogu međusobno uspoređivati. Za bilo koja dva realna broja $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi bar jedna od tvrdnji
$$x = y \qquad \text{ili} \qquad x \leq y \qquad \text{ili} \qquad y \leq x.$$
11. $(x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y.$
12. Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$.
13. Uređajna relacija $\leq$ je u saglasnosti sa sabiranjem, tj.
$$x \leq y \qquad \Rightarrow \qquad (x + z \leq y + z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$
14. Uređajna ralacija $\leq$ je u saglasnosti s množenjem, tj.
$$(0 \leq x \ \vee \ 0 \leq y) \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq xy.$$
15. U skupu $\mathbb{R}$ vrijedi *Arhimedov aksiom*, tj. za bilo koja dva realna broja $a > 0$ i $b > 0$ postoji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $b < na$.
16. Prethodnih 15 svojstava posjeduje i skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, ali svojstvo skupa $\mathbb{R}$ koje ne posjeduje skup $\mathbb{Q}$ je da svaki odozgo ograničen neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

U skupu $\mathbb{R}$ realnih brojeva nije uvijek rješiva jednačina oblika $x^2 + a = 0$. Tako imamo da jednačina $x^2 + 2 = 0$ nije rješiva u skupu realnih brojeva, jer ne postoji realan broj čiji je kvadrat negativan broj. Zbog toga imamo potrebu za skupom u kojem će i takve jednačine biti rješive. Na taj način dolazimo do **skupa kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$. Elementi tog skupa su uređeni parovi (a, b) realnih brojeva, a operacije sabiranja i množenja se definiraju na sljedeći način:
$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Identificirajući realan broj x s kompleksnim brojem $(x, 0)$ dobijamo da skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ postaje dio (podskup) skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. U vezi s tim imamo da je $(0, 0) = 0$ i $(1, 0) = 1$.

Definicija 1.17. *Kompleksan broj* $(0, 1)$ *se naziva* ***imaginarna jedinica*** *i označava se s* i.

U skladu s prethodnom definicijom imamo da je

$$(a,b) \in \mathbb{C} \Rightarrow (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0),$$

pa dobijamo da je

$$(a,b) = a + ib,$$

što predstavlja **standardni** ili **algebarski** oblik kompleksnog broja.

Standardna oznaka za kompleksan broj je z i vrijedi da za svaki kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$ postoje jedinstveni realni brojevi $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $z = a + ib$. Broj a se naziva **realan dio** kompleksnog broja z i označava $a = \operatorname{Re} z$, a broj b se naziva **imaginaran dio** kompleksnog broja z i označava $b = \operatorname{Im} z$. Kompleksan broj $\bar{z} = a - ib$ se naziva **konjugirano kompleksan broj** kompleksnog broja $z = a + ib$.

1.4 Pravila djeljivosti

Definicija 1.18. *Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da je b* ***djeljiv*** *s a, odnosno da a* ***dijeli*** *b, ako postoji cijeli broj q takav da je $b = aq$. To zapisujemo s $a|b$. Ako b nije djeljiv s a, onda pišemo $a \nmid b$.*

Ako $a|b$, onda još kažemo da je a ***djelilac*** *ili* ***djelitelj*** *ili* ***faktor*** *od b, a da je b* ***sadržilac*** *ili* ***višekratnik*** *od a.*

Napomena 1. *Kako u slučaju da prirodan broj a dijeli cijeli broj b vrijedi da i broj $-a$ dijeli broj b, i obratno, to je uobičajeno da se govori samo o pozitivnim djeliteljima.*

Definicija 1.19. *Brojevi 1 i n se nazivaju* ***trivijalni djelitelji*** *broja n, a djelitelji broja n koji su različiti od 1 i n se nazivaju* ***netrivijalni djelitelji****. Djelitelji broja n različiti od broja n se nazivaju* ***pravi djelitelji****.*

Definicija 1.20. *Za prirodan broj p veći od 1 kažemo da je* ***prost*** *ako nema netrivijalnih djelitelja, tj. ako su njegovi jedini djelitelji 1 i p. Za prirodan broj p veći od 1 koji nije prost kažemo da je* ***složen****.*

Ako su a, b i c prirodni brojevi i p prost broj, onda vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $(a|b \wedge a|c) \;\Rightarrow\; a|(b+c)$,
2. $a|b \;\Rightarrow\; a|bc, \forall c \in \mathbb{Z}$,
3. $(a|b \wedge b|c) \;\Rightarrow\; a|c$,
4. $p|ab \;\Rightarrow\; (p|a \vee p|b)$.

Definicija 1.21. *Svaki prirodan broj $n > 1$ možemo prikazati u obliku*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

*gdje su $p_1, \ldots, p_r$ različiti prosti brojevi, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ prirodni brojevi. Ovakav prikaz broja n se zove **kanonski rastav broja n na proste faktore.***

Pravila djeljivosti nam služe za ispitivanje da li je dani broj djeljiv s unaprijed određenim djeliteljem, ali bez provođenja postupka dijeljenja. Najčešće se ispitivanje provodi ispitujući cifre danog broja. Sljedeći teorem predstavlja jedno pravilo za djeljivost prirodnim brojevima manjim od 10, tj. pravilo djeljivosti jednocifrenim brojem.

Teorem 1.1. *Neka je prirodan broj b zapisan u obliku*

$$b = \overline{b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_0} = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0,$$

gdje je $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, b_n \neq 0$. Broj b je djeljiv jednocifrenim prirodnim brojem m ako i samo ako je broj

$$b_n \cdot (10 - m)^n + b_{n-1} \cdot (10 - m)^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot (10 - m)^2 + b_1 \cdot (10 - m) + b_0$$

djeljiv brojem m.

Pravila djeljivosti

Broj je djeljiv

1. s 2 ako i samo ako mu je posljednja cifra 0, 2, 4, 6 ili 8;
2. s 3 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv s 3;
3. s 4 ako i samo ako mu je dvocifreni završetak djeljiv s 4;
4. s 5 ako i samo ako mu je posljednja cifra 0 ili 5;
5. sa 6 ako i samo ako je djeljiv i s 2 i s 3;
6. sa 7 ako i samo ako mu je razlika zbira skupina od tri cifre na neparnim mjestima odnosno na parnim mjestima, idući s lijeva na desno, djeljiva sa 7;
7. sa 7 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i 2–struke cifre jedinica djeljiva sa 7;

8. sa 7 ako i samo ako mu je razlika broja hiljada i trocifrenog završetka djeljiva sa 7;
9. s 8 ako i samo ako mu je trocifreni završetak djeljiv s 8;
10. s 9 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv s 9;
11. s 10 ako i samo ako mu je posljednja cifra 0;
12. s 11 ako i samo ako mu je razlika zbira cifara na neparnim i zbira cifara na parnim mjestima djeljiva s 11;
13. s 11 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i cifre jedinica djeljiva s 11;
14. s 11 ako i samo ako mu je razlika broja hiljada i trocifrenog završetka djeljiva s 11;
15. s 13 ako i samo ako mu je razlika zbira skupina od tri cifre na neparnim mjestima odnosno na parnim mjestima, idući s lijeva na desno, djeljiva s 13;
16. s 13 ako i samo ako mu je zbir broja desetica i 4–struke cifre jedinica djeljiv s 13;
17. s 13 ako i samo ako mu je razlika broja hiljada i trocifrenog završetka djeljiva s 13;
18. sa 17 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i 5–struke cifre jedinica djeljiva sa 17;
19. s 19 ako i samo ako mu je zbir broja desetica i 2–struke cifre jedinica djeljiv s 19;
20. s 23 ako i samo ako mu je zbir broja desetica i 7–struke cifre jedinica djeljiv s 23;
21. s 25 ako i samo ako mu je dvocifreni završetak djeljiv s 25.
22. s 29 ako i samo ako mu je zbir broja desetica i 3–struke cifre jedinica djeljiv s 29;
23. s 31 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i 3–struke cifre jedinica djeljiva s 31;

24. s 37 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i 11–struke cifre jedinica djeljiva s 37;
25. s 37 ako i samo ako mu je zbir broja hiljada i trocifrenog završetka djeljiv s 37;
26. s 41 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i 4–struke cifre jedinica djeljiva s 41;
27. s 43 ako i samo ako mu je zbir broja desetica i 13–struke cifre jedinica djeljiv s 43;
28. s 47 ako i samo ako mu je razlika broja desetica i 14–struke cifre jedinica djeljiva s 47;
29. sa 100 ako i samo ako su mu posljednje dvije cifre nule;
30. s 10^k ako i samo ako su mu posljednjih k cifara nule.

Napomena 2. *Prilikom primjene pravila* 6 *i* 15*, ako broj cifara ispitivanog broja nije djeljiv s* 3*, onda mu se s desne strane dopiše potreban broj nula. Recimo i da je broj desetica nekog prirodnog broja broj koji se dobije kada zadanom broju obrišemo cifru jedinica. Tako je, na primjer,* 376 *broj desetica brojeva* $3760, 3761, 3762, \ldots, 3769$*. Analogno se definira i broj hiljada kao broj koji se dobije kada zadanom broju obrišemo trocifreni završetak. Tako imamo, na primjer, da je broj hiljada broja* 1234567 *jednak* 1234*, dok je broj hiljada broja* 120034 *jednak* 120*. Potrebno je još napomenuti da se svako pravilo ponavlja sve dok se ne dođe do broja za koji smo sigurni da li je djeljiv ili nije s posmatranim brojem.*

Primjer 1.6. *Ispitati da li su dani brojevi djeljivi s brojevima:* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6*,* 7*,* 8*,* 9 *i* 10*.*

$a)\quad a = 11575610046 \qquad b)\quad b = 311726705680 \qquad c)\quad c = 440895$

Rješenje:

$a)$ Kako je posljednja cifra broja a jednaka 6, to je on djeljiv s 2, ali nije djeljiv ni s 5 ni s 10. Zbir cifara mu je $1 + 1 + 5 + 7 + 5 + 6 + 1 + 0 + 0 + 4 + 6 = 36$, što je djeljivo s 3, jer zbir cifara broja 36 je 9, a 9 je djeljivo s 3. Kako je zbir cifara djeljiv i s 9, to je i broj a djeljiv s 9. Imamo da je broj a djeljiv i s 2 i s 3, pa je djeljiv i sa 6. Dvocifreni završetak mu je 46, što nije djeljivo s 4 pa ni broj a nije djeljiv s 4.

Trocifreni završetak mu je 046, što nije djeljivo s 8 pa ni broj a nije djeljiv s 8. Ostaje nam još ispitati djeljivost sa 7. Iskoristimo pravilo (6). Skupine od po tri cifre, idući s lijeva na desno, su: 115, 756, 100 i 460 (posljednju skupinu dopunimo nulom s desne strane).

$$(115 + 100) - (756 + 460) = 215 - 1216 = -1001$$

Kako broj 1001 ima 4 cifre, što nije djeljivo s 3, to broju 1001 s desne strane dopišemo dvije nule i dobijamo broj 100100. Skupine od po tri cifre su 100 i 100.

$$100 - 100 = 0$$

Kako je broj 0 djeljiv sa 7, to je i broj 1001, pa samim tim i -1001 djeljiv sa 7, te zaključujemo da je broj 11575610046 djeljiv sa 7.

b) Kako je posljednja cifra broja b jednaka 0, to je on djeljiv s 2, ali je djeljiv i s 5 i s 10. Zbir cifara mu je 46, što nije djeljivo s 3, jer zbir cifara broja 46 je 10, a 10 nije djeljivo s 3. Zaključujemo da broj b nije djeljiv s 3, pa samim tim ni s 9. Imamo da je broj b djeljiv s 2 ali ne i s 3, pa nije djeljiv ni sa 6. Dvocifreni završetak mu je 80, što je djeljivo s 4 pa je i broj b djeljiv s 4. Trocifreni završetak mu je 680, što je djeljivo s 8 pa je i broj b djeljiv s 8. Ostaje nam još ispitati djeljivost sa 7. Iskoristimo isto pravilo. Skupine od po tri cifre, idući s lijeva na desno, su: 311, 726, 705 i 680.

$$(311 + 705) - (726 + 680) = 1016 - 1406 = -390$$

Kako za broj b razlika zbira skupina od tri cifre na neparnim mjestima i zbira skupina od tri cifre na parnim mjestima iznosi -390 i nije djeljiva sa 7, to ni broj b nije djeljiv sa 7.

Napomenimo da zbog neparnosti broja b nismo uopće trebali provjeravati njegovu djeljivost s brojevima $2, 4, 6, 8$ i 10, jer neparan broj ne može biti djeljiv parnim brojem.

c) Kako je posljednja cifra broja c jednaka 5, to on nije djeljiv ni s 2 ni s 10, ali jeste djeljiv s 5. Zbir cifara mu je $4 + 4 + 0 + 8 + 9 + 5 = 30$, što je djeljivo s 3 pa je broj c djeljiv s 3. Međutim, kako zbir cifara nije djeljiv s 9, to ni broj c nije djeljiv s 9. Kako broj c nije djeljiv s 2, to on nije djeljiv ni sa 6. Dvocifreni završetak mu je 95, što nije djeljivo s 4 pa ni broj c nije djeljiv s 4. Trocifreni završetak mu je

895, što nije djeljivo s 8 pa ni broj c nije djeljiv s 8. Ostaje nam još ispitati djeljivost sa 7. Prikažimo upotrebu pravila (7).

$$\begin{aligned} 440895 \quad &\to \quad 44089 - 2 \cdot 5 = 44079 \quad \to \quad 4407 - 2 \cdot 9 = 4389 \\ &\to \quad 438 - 2 \cdot 9 = 420 \quad \to \quad 42 - 2 \cdot 0 = 42 = 7 \cdot 6 \end{aligned}$$

Kako je broj 42 djeljiv sa 7, to je i broj 440895 djeljiv sa 7.

$\diamondsuit$

Primjer 1.7. *Ispitati da li je broj* 16049371 *djeljiv s* 13.

Rješenje: Analogno broju desetica nekog prirodnog broja, broj hiljada nekog prirodnog broja se dobije kada se zadanom broju izbrišu posljednje tri cifre. Pogledajmo sada primjenu pravila (17).

$$16049371 \quad \to \quad 16049 - 371 = 15678 \quad \to \quad 15 - 678 = -663$$

Kako je broj $-663 = 13 \cdot (-51)$ djeljiv s 13, to je i broj 16049371 djeljiv s 13.

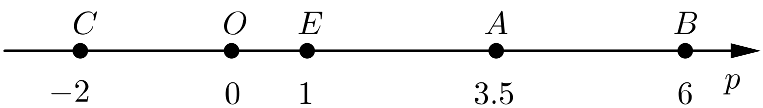
$\diamondsuit$

Poglavlje 2

Elementarne funkcije

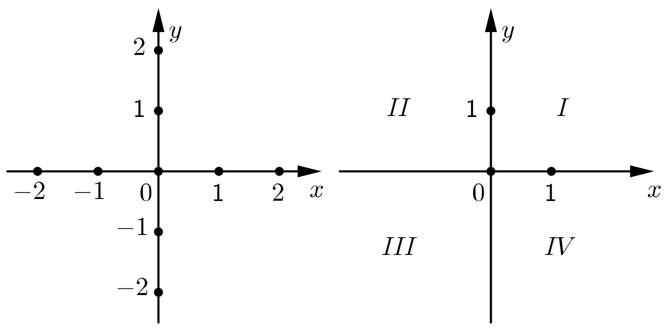
2.1 Koordinatni sistem u ravni

Na pravcu p istaknimo dvije tačke O i E, te tački O pridružimo broj 0, a tački E pridružimo broj 1. Na taj način je određena jedinična duž $\overline{OE}$. Pravac na kojem je određena jedinična duž se naziva **brojevni pravac**. Realnim brojevima možemo pridružiti tačke na brojevnom pravcu.



Na slici vidimo da broj 6 određuje položaj tačke B, pa kažemo da je broj 6 **koordinata** tačke B i pišemo $B(6)$. Uzimajući u obzir da se brojevi posmatraju kao koordinate tačaka na pravcu, pravac p se naziva i **koordinatni pravac**. Tačka O se naziva **ishodište** koordinatnog pravca.

Nacrtamo li u ravni dva koordinatna pravca tako da se sijeku u tački kojoj je pridružen broj 0 i da su okomiti jedan na drugog, dobijamo **pravougli koordinatni sistem** u ravni koji se još naziva **Dekartov** ili **Kartezijev koordinatni sistem** u ravni.



Koordinatni pravci se nazivaju **koordinatne osi** a njihov presjek **koordinatni početak** ili **ishodište koordinatnog sistema**. Jedna koordinatna osa se označava s x i naziva **apscisna os** ili **osa apscisa**, a druga se označava s y i naziva **ordinatna os** ili **osa ordinata**. Ravan s koordinatnim sistemom xOy se naziva **koordinatna ravan**. Koordinatne ose x i y dijele koordinatnu ravan xOy na 4 dijela koji se nazivaju **kvadranti** i označavaju se rimskim brojevima I, II, III i IV. Svakom uređenom paru (x, y) realnih brojeva pripada tačno jedna tačka $T(x, y)$ u koordinatnoj ravni. Brojevi x i y se nazivaju **koordinate** tačke T, i to x je **apscisa** a y je **ordinata** tačke T.

2.2 Pojam funkcije

Broj i funkcija su osnovni pojmovi u matematici. Funkcija (preslikavanje, pridruživanje) je apstraktan pojam koji se javlja u mnogim situacijama, ne samo u matematici nego i u drugim prirodnim i društvenim naukama. Radi se o tome da se posmatraju dvije ili više veličina od kojih jedna zavisi od ostalih. Promjenom vrijednosti jedne veličine, istražujemo kako će se promijeniti druga veličina. Ta se zavisnost zove funkcijska zavisnost.

Definicija 2.1. *Neka su A i B dva neprazna skupa. Ako je* svakom *elementu x skupa A pridružen* tačno jedan *element y skupa B, tada kažemo da je definirana* ***funkcija (preslikavanje, pridruživanje)*** *iz skupa A u skup B.*

Funkcije obično označavamo slovima f, g, h, F, H itd. Ako je funkcija f definirana sa skupa A u skup B onda to označavamo

$$f\colon A \to B.$$

Ako funkcija f elementu x pridružuje element y, onda pišemo $f(x) = y$. Kažemo da je $f(x)$ **vrijednost funkcije** f na elementu x. $f(x)$ se naziva **slika** od x, a x se naziva **original** (**praslika**) od $f(x)$. Kažemo da je x **nezavisna**, a $f(x)$ **zavisna promjenljiva** (**varijabla**). Skup A se naziva **domena** ili **područje definicije** funkcije f i često se označava s $\mathcal{D}(f)$ ili $\mathcal{D}_f$, a skup B se naziva **kodomena** od f. Skup svih slika, tj. skup $\{f(x) \in B : x \in A\} \subseteq B$ se naziva **slika** od f i označava s $\mathcal{R}(f)$ ili $\mathcal{R}_f$ ili $f(A)$. Za funkciju kažemo da je poznata ako joj znamo domenu, kodomenu i zakon pridruživanja.

Za dvije funkcije f i g kažemo da su jednake ako vrijedi

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \qquad \wedge \qquad f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathcal{D}_f.$$

Definicija 2.2. *Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je*

(*a*) ***injekcija*** *ako za $x, y \in A$ iz $x \neq y$ slijedi da je $f(x) \neq f(y)$,*

(*b*) ***surjekcija*** *ako za svaki $y \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $f(x) = y$,*

(*c*) ***bijekcija*** *ako je i injekcija i surjekcija.*

Definicija 2.3. *Neka je $f\colon A \to B$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1}\colon B \to A$ koja se naziva* ***inverzna funkcija*** *funkcije f i vrijedi*

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = y.$$

Treba napomenuti da ako je funkcija g inverzna funkciji f tada je i funkcija f inverzna funkciji g ($f^{-1} = g \Leftrightarrow g^{-1} = f$), pa se govori o paru inverznih funkcija. Također vrijedi da je $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Inverznu funkciju funkciji $f(x)$ određujemo na sljedeći način:

1. Zapišemo funkciju $f(x)$ u obliku $y = f(x)$;
2. Jednačinu $y = f(x)$ riješimo po nepoznatoj x;
3. Ako postoji jedinstveno rješenje te jednačine, tada funkcija $f(x)$ ima inverznu funkciju $x = f^{-1}(y)$;
4. Zamijenimo imena nepoznatima x i y i dobijamo zapis $y = f^{-1}(x)$.

Primjer 2.1. *Odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2x - 3$.*

Rješenje: Zapišemo li funkciju u obliku $y = f(x)$ dobijamo

$$y = 2x - 3.$$

Odredimo li x dobijamo

$$x = \frac{y+3}{2},$$

pa je

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}.$$

Sada vrlo jednostavno dobijamo traženi oblik funkcije koja je inverzna funkciji $f(x) = 2x - 3$, a to je

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}.$$

$\diamondsuit$

Definicija 2.4. *Neka su $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ dvije funkcije.* ***Kompozicija funkcija*** *g i f je funkcija $g \circ f\colon A \to C$ definirana formulom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Komponiranje funkcija (kada je definirano) nije komutativno, ali jeste asocijativno, tj. vrijedi

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \qquad \text{i} \qquad (f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x).$$

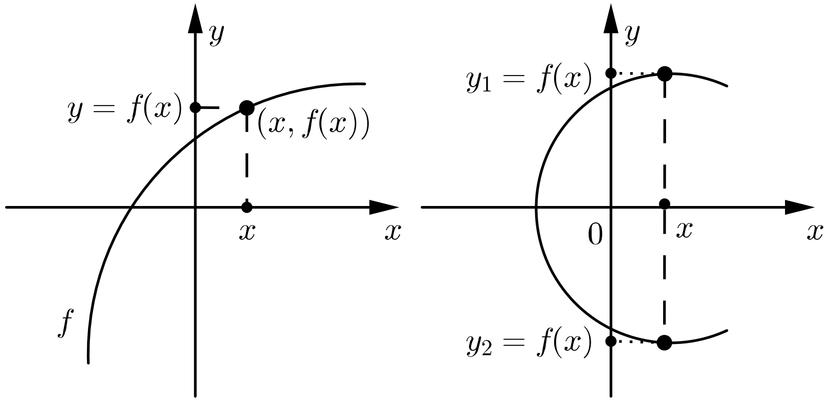
Ako je definirana funkcija $f\colon A \to B$, tada je za svaki element x skupa A jednoznačno određen uređen par $(x, f(x))$. Skup Γ_f svih uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in A$, se naziva **graf funkcije** f.

$$\Gamma_f = \{(x, y) \;:\; y = f(x), x \in A\}$$

Napomenimo da je graf funkcije f^{-1} osno simetričan grafu funkcije f u odnosu na pravac $y = x$, tj. u odnosu na simetralu I i III kvadranta.

Funkcija može biti zadana analitički (formulom), tabelarno i grafički.

Za funkciju $f\colon A \to \mathbb{R}$ kažemo da je **realna funkcija**, za $f\colon \mathbb{R} \to B$ kažemo da je **funkcija realne varijable**, a za funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je **realna funkcija realne varijable**. Takve se funkcije vrlo često predstavljaju pomoću grafa u pravouglom koordinatnom sistemu, gdje se na x–osu nanose nezavisne varijable, a na y–osu vrijednosti funkcije. **Nultačka**



(**nula**) realne funkcije realne varijable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je realan broj $x \in \mathbb{R}$ za koji funkcija postiže vrijednost jednaku nuli, tj. za koju je $f(x) = 0$. Također možemo reći da se apscisa tačke u kojoj graf funkcije f dira ili siječe osu x naziva nultačka funkcije f.

Na lijevoj slici imamo graf funkcije f, dok na desnoj slici nije predstavljen graf funkcije, jer su u tom slučaju broju x pridružena dva broja, y_1 i y_2, što je u suprotnosti s definicijom funkcije.

Definicija 2.5. *Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je* ***ograničena (omeđena)*** *ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x)| \leq M$ za svaki $x \in A$. Funkcija je* ***neograničena (neomeđena)*** *ako nije ograničena (omeđena).*

Definicija 2.6. *Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je* ***parna*** *ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in A$, a* ***neparna*** *ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in A$.*

Graf parne funkcije je simetričan u odnosu na y–osu, a graf neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Definicija 2.7. *Neka je zadana funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, te neka je $I \subset A$ neki interval.*

Kažemo da funkcija f ***raste*** *(da je* ***rastuća****) na intervalu I ako*

$$(\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2) \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Kažemo da funkcija f ***strogo raste*** *(da je* ***strogo rastuća****) na intervalu I ako*

$$(\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2) \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

*Kažemo da funkcija f **pada** (da je **padajuća**) na intervalu I ako*

$$(\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2) \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \geq f(x_2).$$

*Kažemo da funkcija f **strogo pada** (da je **strogo padajuća**) na intervalu I ako*

$$(\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2) \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

Za funkciju koja je rastuća ili padajuća kažemo da je **monotona**, a za funkciju koja je strogo rastuća ili strogo padajuća kažemo da je **strogo monotona**.

Neka je zadana funkcija $f\colon A \to B$.

- Kažemo da funkcija f u tački x_0 ima (postiže) **lokalni minimum** ako postoji interval $\langle a, b\rangle \subseteq A$, koji sadrži tačku x_0 ($x_0 \in \langle a, b\rangle$), takav je $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$. Taj lokalni minimum u tački x_0 iznosi $f(x_0)$.
- Kažemo da funkcija f u tački x_0 ima (postiže) **lokalni maksimum** ako postoji interval $\langle a, b\rangle \subseteq A$, koji sadrži tačku x_0 ($x_0 \in \langle a, b\rangle$), takav je $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$. Taj lokalni maksimum u tački x_0 iznosi $f(x_0)$.
- Kažemo da funkcija f u tački x_0 ima (postiže) **globalni minimum** na svojoj domeni A ako je $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in A$. Taj globalni minimum iznosi $f(x_0)$.
- Kažemo da funkcija f u tački x_0 ima (postiže) **globalni maksimum** na svojoj domeni A ako je $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$. Taj globalni maksimum iznosi $f(x_0)$.

Za tačku s nekim od navedenih svojstava kažemo da je **ekstrem** (lokalni ili globalni) ili da je **tačka ekstrema** (lokalnog ili globalnog).

Definicija 2.8. *Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je **periodična** ako postoji realan broj $P \neq 0$ takav da je $f(x + P) = f(x)$ za svaki $x \in A$. Najmanji od svih takvih pozitivnih brojeva P (ako postoji) se naziva **osnovni period** funkcije f.*

Definicija 2.9. *Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je **konveksna** na intervalu $I \subseteq A$ ako je*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \ \forall x_1, x_2 \in I.$$

Graf konveksne funkcije f na tom intervalu I je "udubljen".

Definicija 2.10. *Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je* ***konkavna*** *na intervalu $I \subseteq A$ ako je*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall x_1, x_2 \in I.$$

Graf konkavne funkcije f na tom intervalu I je "ispupčen".

2.3 Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su:

1. polinomi,
2. racionalne funkcije,
3. eksponencijalna funkcija,
4. stepene funkcije (opća potencija),
5. logaritamska funkcija,
6. trigonometrijske funkcije,
7. ciklometrijske (arkus) funkcije.

Polinomi

Svaka funkcija $P_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, se naziva **polinom** (n–tog stepena). Koeficijent a_n se naziva **vodeći** (najstariji) koeficijent. Po definiciji se uzima da je konstanta polinom nultog stepena. Domena (i kodomena) polinoma je cijeli skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Treba napomenuti da su zbir i proizvod dva polinoma ponovo polinomi. Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki.

Racionalne funkcije

Funkcija oblika

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n–tog i m–tog stepena, redom, naziva se **racionalna funkcija**. Polinome još nazivamo **cijele racionalne funkcije** (kod njih je $Q(x) = 1$ konstanta), a sve ostale racionalne funkcije nazivamo **razlomljene racionalne funkcije**.

Ako je $P_n(x)$ polinom n–tog, a $Q_m(x)$ polinom m–tog stepena, te ako je $n < m$, onda kažemo da je $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ **prava racionalna funkcija**, a ako je $n \geq m$, onda kažemo da je $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ **neprava racionalna funkcija**. Neprava racionalna funkcija se može prikazati u obliku

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

gdje je $S_{n-m}(x)$ polinom $n-m$–tog stepena, a $T_k(x)$ polinom stepena k, $k < m$.

Domena racionalne funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$ bez nultačaka polinoma u nazivniku, tj.

$$\mathcal{D}_R = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,:\, Q_m(x) = 0\}.$$

Treba napomenuti da se podrazumijeva da je racionalna funkcija već skraćena, tj. da ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ koji je nultačka i polinoma u brojniku i polinoma u nazivniku. Kodomena racionalne funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$. Nultačke racionalne funkcije su nultačke polinoma u brojniku, tj.

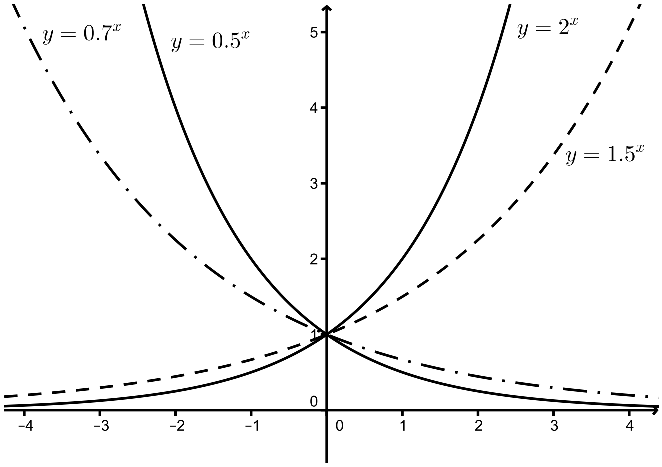
$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P_n(x) = 0.$$

Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ oblika

$$f(x) = a^x$$

se naziva (**opća**) **eksponencijalna funkcija**. Realan broj a se naziva **baza**, a realan broj x se naziva **eksponent**. Domena eksponencijalne funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Kako je $a^x > 0$ za svaki pozitivan realan broj a, to je slika eksponencijalne funkcije skup $\langle 0, +\infty\rangle$ pozitivnih realnih brojeva i njen graf niti dira niti siječe osu x. Eksponencijalna funkcija je strogo monotona i nema ekstrema. U slučaju kada je $a > 1$, ona je strogo rastuća, a kada je $0 < a < 1$, ona je strogo opadajuća. Kako je $a^0 = 1$ za svako $a > 0$, to graf svake eksponencijalne funkcije prolazi kroz tačku $(0, 1)$. Također treba napomenuti da su grafovi eksponencijalnih funkcija, čije su baze recipročni brojevi, simetrični u odnosu na osu y.



Baze eksponencijalne funkcije koje su najčešće u upotrebi su $a = 2$ i $a = 10$, te $a = e$, gdje je $e \approx 2.718$ iracionalan broj koji predstavlja **prirodnu eksponencijalnu bazu**. Eksponencijalnu funkciju $f(x) = e^x$ nazivamo **prirodna eksponencijalna funkcija** i u tom slučaju često se umjesto e^x piše $\exp x$.

Stepene funkcije (opća potencija)

Neka je $c \in \mathbb{R}$ bilo koji realan broj. Funkcija $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ oblika

$$f(x) = x^c$$

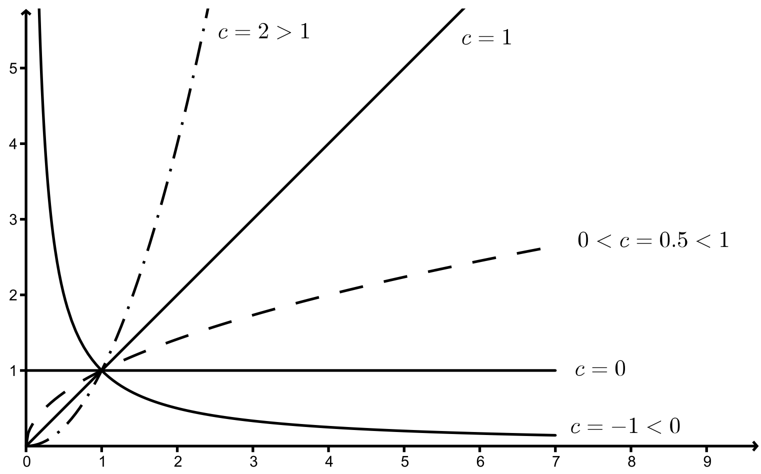
se naziva **opća potencija**. Ova funkcija se definira pomoću formule

$$x^c = e^{c \ln x}, \quad x > 0.$$

Opća potencija je definirana na skupu pozitivnih realnih brojeva i poprima vrijednosti također u skupu pozitivnih realnih brojeva. Nema nultačaka i monotona je (za $c \neq 0$ je strogo monotona). Za $c > 0$ opća potencija strogo raste, a za $c < 0$ strogo pada. Za $c = 0$ imamo da je $f(x) = x^0 = 1$, pa dobijamo konstantnu funkciju $f(x) = 1$ definiranu na skupu $\mathbb{R}^+$. Kako je $f(1) = 1^c = 1$, za svaki realan broj c, to imamo da graf opće potencije prolazi tačkom $(1, 1)$ za svaki realan broj c.

S obzirom na vrijednost eksponenta c možemo posmatrati nekoliko slučajeva.

Potencije s prirodnim eksponentom možemo posmatrati u slučajevima kada je $c = 1$ i kada je $c > 1$. U oba slučaja je domena cijeli skup



realnih brojeva $\mathbb{R}$. Kada je $c = 1$, opća potencija postaje linearna funkcija $y = x$ čiji je graf pravac koji je simetrala prvog i trećeg kvadranta. Kada je c paran broj, slika funkcije je skup $[0, +\infty\rangle$, a kada je c neparan broj, onda je slika funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$. Nultačka je $x_0 = 0$. Za paran c, graf u toj tački dira osu x, a za neparan c u toj tački siječe osu x.

Potencije s cjelobrojnim eksponentom možemo posmatrati kada je $c > 0$, $c = 0$ i $c < 0$. Kada je $c > 0$ imamo da je c prirodan broj, što smo opisali u prethodnom slučaju. Kada je $c = 0$, rekli smo da je tada $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, pa je graf pravac $y = 1$ koji je paralelan s osom x. Za $c < 0$ imamo da je domena skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a nema nultačaka. Za paran c, slika funkcije je skup $\langle 0, +\infty\rangle$, dok je za neparan c slika funkcije skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Potencije s racionalnim eksponentom ćemo posmatrati za racionalne eksponente m/n, gdje je $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\text{nzd}(m, n) = 1$ (razlomak m/n je potpuno skraćen).

n	m	$\mathcal{D}_f$	$f(\mathcal{D})$	nultačka
neparan	$m > 0$ paran	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty\rangle$	0
neparan	$m > 0$ neparan	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
neparan	$m < 0$ paran	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\langle 0, +\infty\rangle$	nema
neparan	$m < 0$ neparan	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	nema
paran	$m > 0$ neparan	$[0, +\infty\rangle$	$[0, +\infty\rangle$	0
paran	$m < 0$ neparan	$\langle 0, +\infty\rangle$	$\langle 0, +\infty\rangle$	nema

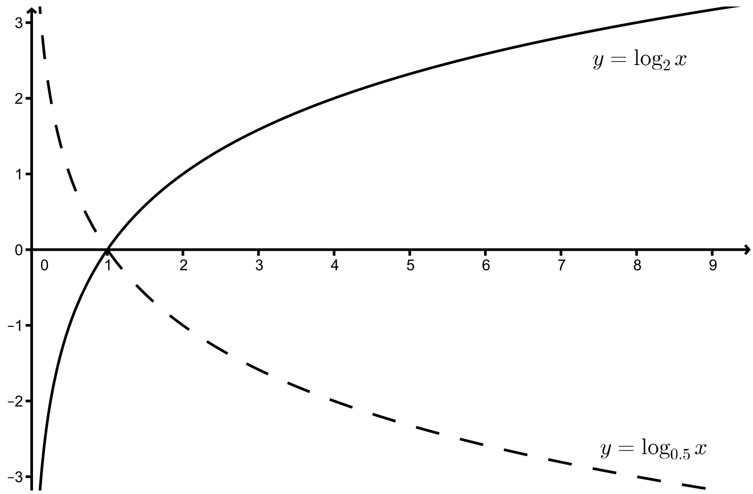
Logaritamska funkcija

Opća eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ je bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}^+$, pa postoji njena inverzna funkcija. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$f(x) = \log_a x$$

nazivamo **logaritamska funkcija** (u bazi a). Logaritamska funkcija je inverzna funkcija opće eksponencijalne funkcije i s njom je povezana na način da je

$$y = \log_a x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a^y.$$



Logaritam pozitivnog realnog broja x po bazi a je realan broj y kojim treba stepenovati bazu a da bi se dobio broj x. Logaritamska funkcija je inverzna funkcija opće eksponencijalne funkcije. Logaritamska funkcija je strogo monotona, i to za $0 < a < 1$ je strogo opadajuća, a za $a > 1$ je strogo rastuća. Kako je $\log_a 1 = 0$, za svaku bazu a, to graf svake logaritamske funkcije prolazi tačkom $(1, 0)$ i $x_0 = 1$ je nultačka logaritamske funkcije.

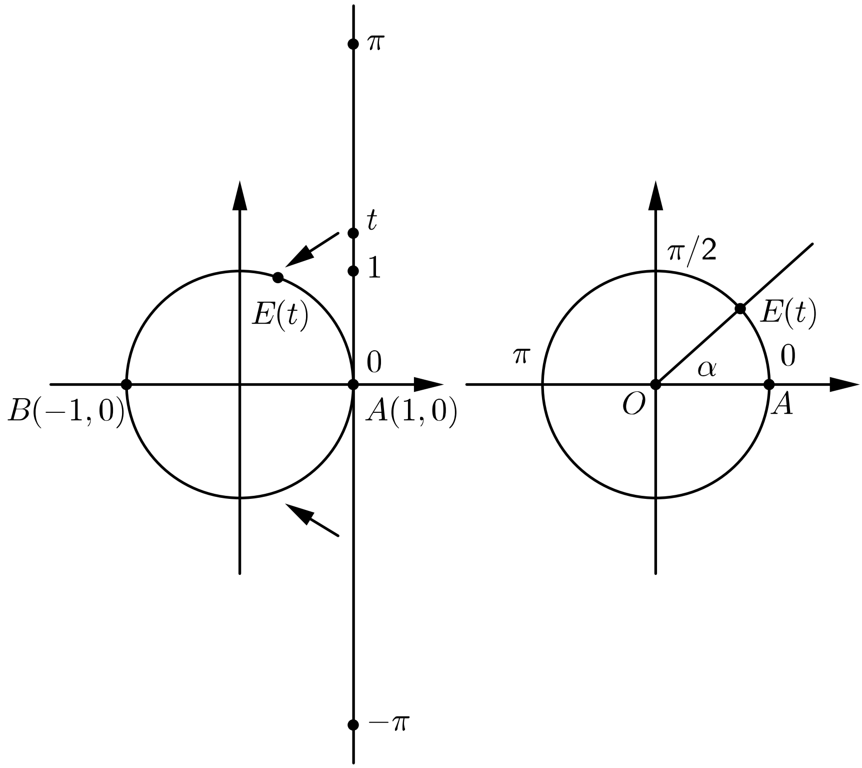
Ako je $a = 10$, onda umjesto $\log_{10} x$ pišemo $\log x$ i broj $\log x$ zovemo **dekadski**, **Briggsov** ili **običan logaritam** broja x.

Ako je $a = e$, onda umjesto $\log_e x$ pišemo $\ln x$ i broj $\ln x$ zovemo **Neperov** (**Napierov**) ili **prirodni logaritam** broja x.

Trigonometrijske funkcije

Trigonometrija (grč. *trigonon* – trougao, *metron* – mjera) je dio matematike koji proučava odnose između dužina stranica i veličina uglova u trouglu.

Ukoliko je riječ o trouglovima u ravni onda je riječ o trigonometriji u ravni, a ukoliko je riječ o trouglovima koji se nalaze na površini kugle, onda je riječ o sfernoj trigonometriji.



Jedan od važnijih pojmova u trigonometriji je brojevna ili trigonometrijska kružnica. Uzmimo Kartezijev koordinatni sistem i u njemu jediničnu kružnicu (poluprečnika 1) s centrom u ishodištu koordinatnog sistema. Na njoj označimo tačke $A(1,0)$ i $B(-1,0)$. Postavimo brojevni pravac koji je okomit na osu x, čije ishodište pada u tačku A i čiji su pozitivni brojevi u prvom kvadrantu. Sada taj pravac namotajmo na kružnicu tako da njegov dio s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru (suprotnom smjeru kazaljke na satu), a njegov dio s negativnim brojevima u negativnom smjeru (u smjeru kazaljke na satu). Na taj način svakom realnom broju t (s pravca) pridružujemo tačno jednu tačku $E(t)$ na kružnici. Kako je obim jedinične kružnice jednak 2π, to u tačku $B(-1,0)$ pada broj π. Jedinična kružnica na koju su na opisani način smješteni realni brojevi se naziva **brojevna** ili **trigonometrijska kružnica**.

Označimo li s K skup svih tačaka na kružnici, onda smo na opisani način definirali preslikavanje E sa skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ na skup K. Uočimo da u svaku tačku na kružnici padne beskonačno mnogo tačaka s brojevnog pravca, tj. tački $E(t)$ su pridruženi realni brojevi $t, t+2\pi$, $t-2\pi, t+4\pi, t-4\pi, \ldots$. Zbog toga funkcija E nema inverznu funkciju. Međutim, kada t prolazi intervalom $[0, 2\pi\rangle$, onda pripadna tačka $E(t)$ prolazi po kružnici K u pozitivnom smjeru, tj. suprotno smjeru kazaljke na satu i pri tome $E(t)$ prolazi kroz svaku tačku kružnice samo jednom. Na taj način dobijamo bijektivnu funkciju koja ima svoj inverz. Sada imamo obostrano jednoznačno pridruživanje između realnih brojeva i tačaka na kružnici. Realan broj t služi kao mjera ugla $\angle AOE(t)$ i kažemo da taj ugao ima t radijana. Ako ugao ima φ radijana onda on ima $180\varphi/\pi$ stepeni, a ako ima ω stepeni onda ima $\omega\pi/180$ radijana. Imamo da je

$$1\,\text{radijan} = 57^\circ 17' 45'' \qquad \text{i} \qquad 1^\circ \approx 0.017\,\text{radijana}.$$

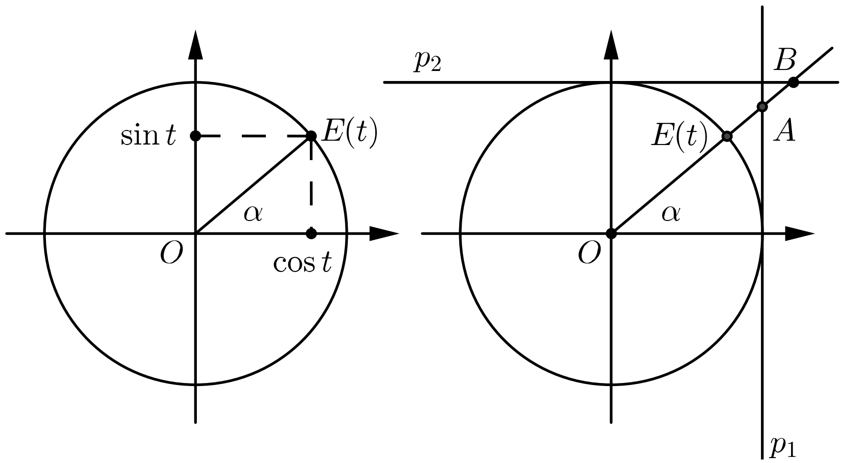
stepeni	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radijani	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Tačka $E(t)$ ima dvije koordinate. Prvu nazivamo kosinus broja t a drugu nazivamo sinus broja t. Tako imamo da je **kosinus realnog broja** t apscisa one tačke $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici koja je pridružena broju t, a **sinus realnog broja** t je ordinata te tačke. Na taj način smo definirali dvije funkcije. Prva je $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ koja se naziva **kosinus**, a druga je $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ koja se naziva **sinus**. Pomoću funkcija sinus i kosinus se definiraju još dvije funkcije, koje se zajedno s funkcijama sinus i kosinus, jednim imenom nazivaju **trigonometrijske funkcije**. To su $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ koja se naziva **tangens** i $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ koja se naziva **kotangens**, a definiraju se kao

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Nultačke funkcija sinus i tangens su brojevi oblika $k\pi$, a nultačke funkcija kosinus i kotangens su brojevi oblika $(2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcije sinus i kosinus su ograničene (i odozdo i odozgo), jer vrijedi da je $-1 \le \sin t \le 1$ i $-1 \le \cos t \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funkcija sinus za $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, postiže svoju maksimalnu vrijednost i ona iznosi 1, a za $3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, postiže svoju minimalnu vrijednost i ona iznosi -1. Funkcija kosinus za $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, postiže svoju maksimalnu vrijednost i ona iznosi 1, a za $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, postiže svoju minimalnu vrijednost i ona iznosi -1. Funkcije tangens i kotangens su neograničene (i odozdo i odozgo) i nemaju lokalnih ekstrema. Sve četiri trigonometrijske funkcije su periodične. Osnovni period funkcija sinus i kosinus je 2π, a funkcija tangens i kotangens je π. Funkcija kosinus je parna, a ostale tri su neparne.

Kako vrijednost funkcija sinus i kosinus (realnog broja ili ugla) možemo očitati na slici kao ordinatu i apscisu tačke, tako i vrijednost funkcija tangens i kotangens (broja ili ugla) možemo očitati kada na sliku s trigonometrijskom kružnicom dodamo pravac p_1 koji je okomit na osu x i prolazi tačkom $(1, 0)$, te pravac p_2 koji je okomit na osu y a prolazi tačkom $(0, 1)$. Pravac p_1 se naziva tangensna os, a pravac p_2 se naziva kotangensna os. Tangens broja t predstavlja ordinata tačke A koja je presjek tangensne ose



p_1 i poluprave iz koordinatnog početka O kroz tačku $E(t)$. Kotangens broja t predstavlja apscisa tačke B koja je presjek kotangensne ose p_2 i poluprave iz koordinatnog početka O kroz tačku $E(t)$.

Ciklometrijske (arkus) funkcije

Kako trigonometrijske funkcije nisu bijekcije, to one ne mogu imati inverzne funkcije. Međutim, u primjenama se često javlja potreba za njihovim inverzima, pa se inverzne funkcije definiraju za pogodno odabrane restrikcije trigonometrijskih funkcija koje su bijekcije. Biraju se restrikcije na intervale koji su najbliži nuli. Ako je zadana funkcija $f\colon A \to B$ i ako je $S \subset A$, onda funkciju $f_0\colon S \to B$ za koju vrijedi da je $f_0(x) = f(x)$, $\forall x \in S$ nazivamo **restrikcija** ili **suženje** funkcije f na skup S. Funkcija f_0 izvan skupa S nije definirana, a na skupu S djeluje jednako kao i funkcija f.

Restrikcija funkcije sinus na interval $[-\pi/2, \pi/2]$ je bijekcija i inverzna funkcija te restrikcije je funkcija **arkus sinus**

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

koja je strogo rastuća i neparna, te ima nultačku $x_0 = 0$.

Restrikcija funkcije kosinus na interval $[0, \pi]$ je bijekcija i inverzna funkcija te restrikcije je strogo opadajuća funkcija **arkus kosinus**

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi],$$

a nultačka joj je $x_0 = 1$.

Restrikcija funkcije tangens na interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ je bijekcija i inverzna funkcija te restrikcije je funkcija **arkus tangens**

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle,$$

koja je strogo rastuća i neparna, a nultačka joj je $x_0 = 0$.

Restrikcija funkcije kotangens na interval $\langle 0, \pi \rangle$ je bijekcija i inverzna funkcija te restrikcije je funkcija **arkus kotangens**

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle,$$

koja je strogo rastuća i nema nultačaka.

Elementarnom funkcijom nazivamo svaku funkciju koju možemo dobiti od osnovnih elementarnih funkcija (i njihovih restrikcija) u konačno mnogo koraka pomoću kompozicije, te aritmetičkih operacija sabiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Algebarske funkcije su elementarne funkcije koje se mogu dobiti komponiranjem općih potencija s racionalnim eksponentima i racionalnih funkcija s racionalnim koeficijentima, tj. to su funkcije koje se iz funkcija $g(x) = 1$ i $h(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, mogu dobiti u konačno mnogo koraka pomoću sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja. Za svaku algebarsku funkciju f postoji polinom $P \neq 0$ od dvije varijable takav da je $P(x, f(x)) = 0$, za svako x iz domene funkcije f. Elementarne funkcije koje nisu algebarske se nazivaju **transcendentne**. Za njih naprijed opisani polinom P ne postoji. Među transcendentne funkcije ubrajamo eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske, ciklometrijske, te većinu racionalnih funkcija (sve one koje imaju bar jedan iracionalan koeficijent). Osim njih, u transcendentne funkcije se ubrajaju i hiperbolne funkcije (koje se definiraju pomoću funkcije e^x) i area funkcije (funkcije inverzne hiperbolnim funkcijama ili njihovim restrikcijama).

Hiperbolne i area funkcije

Hiperbolne funkcije **sinus hiperbolni** $\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i **kosinus hiperbolni** $\mathrm{ch}:\mathbb{R}\to[1,+\infty\rangle$ se definiraju kao

$$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad \text{i} \qquad \mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

dok se funkcije **tangens hiperbolni** $\mathrm{th}:\mathbb{R}\to\langle -1,1\rangle$ i **kotangens hiperbolni** $\mathrm{cth}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$ definiraju, slično tangensu i kotangensu, kao

$$\mathrm{th}\,x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ \text{i}\ \mathrm{cth}\,x=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

Funkcije sh, th i cth su neparne, a funkcija ch je parna. Funkcije sh, ch i th su strogo rastuće. Funkcija cth strogo pada na skupu $\langle-\infty,0\rangle$ (opada od -1 do $-\infty$) a strogo raste na skupu $\langle 0,+\infty\rangle$ (raste od 1 do $+\infty$). Nultačka funkcija sh i th je $x_0=0$, dok funkcije ch i cth nemaju nultačaka.

Funkcije sh i th imaju inverzne funkcije, dok se za funkcije ch i cth moraju posmatrati njihove restrikcije. Za funkciju ch posmatramo restrikciju na interval $[0,+\infty\rangle$, dok za funkciju cth posmatramo restrikciju na interval $\langle 0,+\infty\rangle$. Funkcije inverzne hiperbolnim funkcijama (i njihovim restrikcijama) se nazivaju **area** funkcije.

Funkcije **area sinus hiperbolni** $\mathrm{arsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i **area kosinus hiperbolni** $\mathrm{arch}:[1,+\infty\rangle\to[0,+\infty\rangle$ definiramo kao

$$\mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\qquad \text{i}\qquad \mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

dok funkcije **area tangens hiperbolni** $\mathrm{arth}:\langle-1,1\rangle\to\mathbb{R}$ i **area kotangens hiperbolni** $\mathrm{arcth}:\mathbb{R}\setminus[-1,1]\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiramo kao

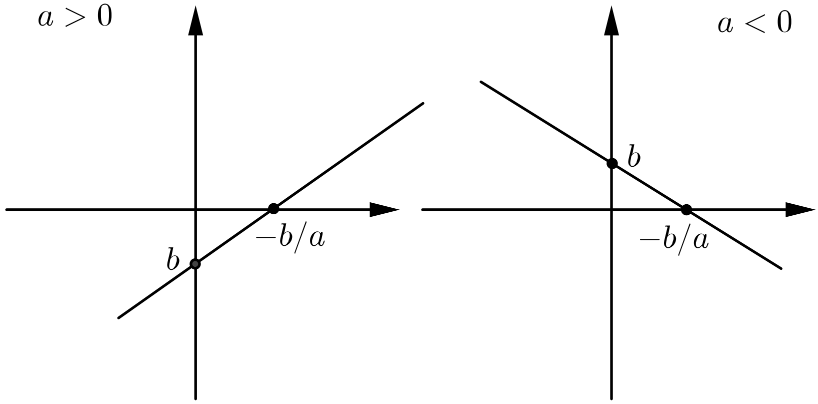
$$\mathrm{arth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\qquad \text{i}\qquad \mathrm{arcth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

2.4 Linearna funkcija

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

se naziva **linearna funkcija**. Graf linearne funkcije je pravac. Obično se zahtijeva da je $a \neq 0$, jer bi inače funkcija bila konstanta ($f(x) = b$) i njen graf bi bio pravac paralelan s osom x.



Parametri o kojima ovisi linearna funkcija $f(x) = ax + b$ su realni brojevi a i b. Posmatrano geometrijski, a predstavlja **koeficijent smjera pravca** ili **nagib pravca**, dok b predstavlja odsječak koji pravac odsijeca na osi y. Analitički, b predstavlja vrijednost funkcije f u tački 0, tj. $b = f(0)$, dok a predstavlja omjer (količnik) prirasta funkcije i prirasta argumenta, tj.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Što je vrijednost nagiba po apsolutnoj vrijednosti veća, to se vrijednost funkcije brže mijenja u odnosu na promjenu varijable x.

Jednačina pravca koji prolazi kroz dvije zadane tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, gdje je $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$, je dana s

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Linearna funkcija je neograničena (i odozdo i odozgo) strogo monotona funkcija i u slučaju kada je $a > 0$ ona strogo raste, a u slučaju kada je $a < 0$ ona strogo opada. Linearna funkcija nema ekstrema.

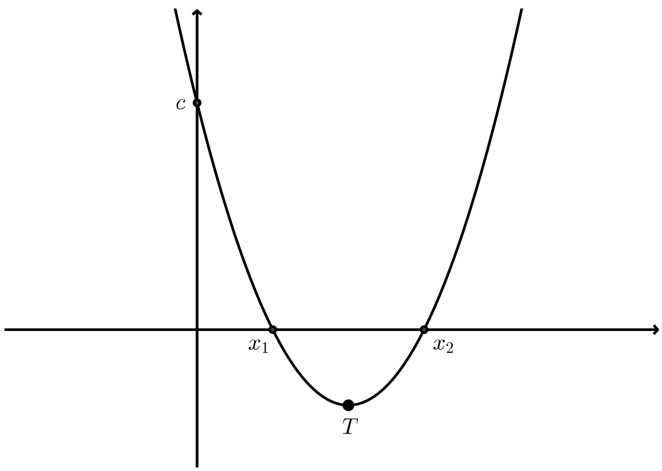
Nultačka funkcije je ona vrijednost varijable x za koju funkcija $f(x)$ postiže vrijednost 0, tj. nultačka funkcije je rješenje jednačine $f(x) = 0$. Tako dobijamo da je $x = -b/a$ nultačka linearne funkcije $f(x) = ax + b$.

Ako analiziramo znak linearne funkcije $f(x) = ax+b$, imamo da u slučaju kada je $a > 0$, onda je funkcija negativna $\forall x \in \langle -\infty, -b/a \rangle$, tj. $f(x) < 0$, a $\forall x \in \langle -b/a, +\infty \rangle$ je funkcija pozitivna, tj. $f(x) > 0$. Ako je $a < 0$, onda je funkcija pozitivna za svako x iz intervala $\langle -\infty, -b/a \rangle$, a negativna za sve x iz intervala $\langle -b/a, +\infty \rangle$.

2.5 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija (polinom drugog stepena) je funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}.$$



Graf kvadratne funkcije je parabola. Broj a se naziva **vodeći koeficijent**. Ako je $a > 0$ onda je kvadratna funkcija konveksna (parabola ima "otvor prema gore"), ako je $a < 0$ onda je kvadratna funkcija konkavna (parabola ima "otvor prema dolje"). Broj b se naziva **linearni koeficijent** a broj c se naziva **slobodni koeficijent** i on predstavlja odsječak koji parabola odsijeca na osi y, tj. predstavlja ordinatu tačke u kojoj parabola siječe osu y. Očigledno je da parabola prolazi kroz koordinatni početak ako i samo ako je $c = 0$. Nultačke kvadratne funkcije se računaju pomoću formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kako su nultačke funkcije realne vrijednosti, to vidimo da postojanje nultačaka kvadratne funkcije zavisi od vrijednosti potkorjene veličine u formuli za određivanje nultačaka. Potkorjena veličina se označava s

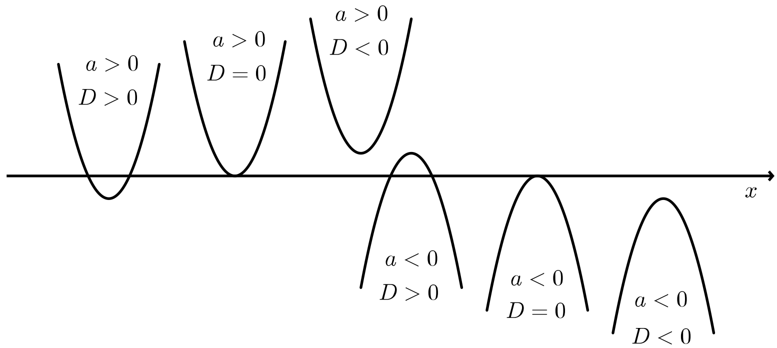
$$D = b^2 - 4ac$$

i naziva **diskriminanta kvadratne funkcije**.

$D > 0$: Postoje dvije realne nultačke i parabola siječe osu x u dvije tačke.

$D = 0$: Postoji jedna realna nultačka i parabola dira osu x.

$D < 0$: Ne postoje realne nultačke i parabola niti dira, niti siječe osu x.



Kada je $a > 0$ kadratna funkcija je neograničena odozgo, ali je ograničena odozdo i ima svoj minimum. Kada je $a < 0$ imamo suprotnu situaciju. U tom slučaju je kadratna funkcija neograničena odozdo, ali je ograničena odozgo i ima svoj maksimum. Kao što vidimo, svaka kvadratna funkcija ima tačno jedan ekstrem. Ta tačka je $T(x_0, y_0)$ i naziva se **tjeme parabole**.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \qquad y_0 = f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Kvadratna funkcija je parna za $b = 0$, a za $b \neq 0$ niti parna niti neparna. Ipak je njen graf simetričan u odnosu na pravac $x = -b/2a$, tj. pravac koji je paralelan s osom y i prolazi kroz tjeme parabole.

Kada je $a > 0$ kvadratna funkcija strogo opada na intervalu $\langle -\infty, x_0 \rangle$, i to opada od $+\infty$ do y_0, a na intervalu $\langle x_0, +\infty \rangle$ ona strogo raste od y_0 do $+\infty$. Kada je $a < 0$ onda za $x \in \langle -\infty, x_0 \rangle$ kvadratna funkcija strogo raste od $-\infty$ do y_0, a za $x \in \langle x_0, +\infty \rangle$ kvadratna funkcija strogo opada od y_0 do $-\infty$.

Sada analizirajmo znak kvadratne funkcije u sva tri slučaja u zavisnosti od vrijednosti diskriminante D.

$D < 0$: U ovom slučaju kvadratna funkcija ima isti znak kao i koeficijent a, tj. ako je $a > 0$, onda je $f(x) > 0$, a ako je $a < 0$, onda je i $f(x) < 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

$D = 0$: I u ovom slučaju je situacija skoro ista kao u prethodnom. Za $a > 0$ je $f(x) > 0$, a ako je $a < 0$ onda je i $f(x) < 0$, za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/2a\}$, dok za $x = -b/2a$ imamo da je $f(x) = 0$.

$D < 0$: U slučaju kada je $a > 0$ onda je $f(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, x_1 \rangle \cup \langle x_2, +\infty \rangle$, a $f(x) < 0$ za $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Kada je $a < 0$ tada je $f(x) > 0$ za $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, dok je $f(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, x_1 \rangle \cup \langle x_2, +\infty \rangle$.

Poglavlje 3

Jednačine i nejednačine

3.1 Osnovni pojmovi

Ako posmatramo funkcije $f(x)$ i $g(x)$ u istoj oblasti argumenta x u kojoj su obje funkcije definirane, onda možemo postaviti pitanje za koje vrijednosti argumenta x su vrijednosti obje funkcije jednake ili je vrijednost funkcije $f(x)$ manja ili veća od vrijednosti funkcije $g(x)$, tj. za koje vrijednosti argumenta x vrijedi:

(a) $f(x) = g(x)$,

(b) $f(x) < g(x)$,

(c) $f(x) > g(x)$.

Ako posmatramo prvi slučaj, tj. $f(x) = g(x)$, mi time ne izražavamo tvrdnju da je vrijednost $f(x)$ zaista jednaka vrijednosti $g(x)$, za sve x za koje su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane, nego se samo pitamo za koje vrijednosti x će se to desiti. Za neke vrijednosti x to može biti ispunjeno, dok za neke druge vrijednosti to ne mora biti slučaj. Analogna je situacija s drugim i trećim slučajem.

Izraz pod (a) se naziva **jednačina** (s jednom nepoznatom), a izrazi (b) i (c) se nazivaju **nejednačine** (s jednom nepoznatom).

Napomenimo da se vrlo često izrazi $f(x) \geq g(x)$ i $f(x) \leq g(x)$ također nazivaju nejednačinama, iako je u oba slučaja riječ o sistemu koji se sastoji od jedne jednačine i jedne nejednačine. Imamo da je $f(x) \geq g(x)$ ako i samo ako je $(f(x) > g(x) \vee f(x) = g(x))$, te da je $f(x) \leq g(x)$ ako i samo ako je $(f(x) < g(x) \vee f(x) = g(x))$.

Argument x u jednačini (a) i nejednačinama (b) i (c) se naziva **nepoznata**.

Ako su u jednačini obje strane algebarski izrazi onda za jednačinu kažemo da je **algebarska**, a ako bar jedna od strana jednačine nije algebarski izraz, onda je jednačina **transcendentna**.

3.2 Rješenje jednačine i nejednačine

Definicija 3.1. *Svaka vrijednost argumenta x, za koju funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju jednake vrijednosti, je **rješenje (korijen)** jednačine $f(x) = g(x)$. Analogno se definira rješenje nejednačine, pa imamo da se svaka vrijednost argumenta x za koju je vrijednost funkcije f manja (veća) od vrijednosti funkcije g naziva **rješenje nejednačine** $f(x) < g(x)$ $(f(x) > g(x))$.*

Napomena 3. *Kvadratna jednačina $x^2 - 10x + 25 = 0$ ima dva rješenja koja su jednaka, tj. ima dvostruko rješenje $x = 5$. Također kažemo da je $x = 5$ rješenje (korijen) kratnosti 2. Jednačina*

$$x^8 - 9x^7 + 21x^6 + 13x^5 - 90x^4 + 96x^3 - 32x^2 = 0$$

ili u ekvivalentnom obliku

$$x^2(x-1)^3(x+2)(x-4)^2 = 0$$

ima četiri različita rješenja, i to $x_1 = 0$ kratnosti 2, $x_2 = 1$ kratnosti 3, $x_3 = -2$ kratnosti 1 i $x_4 = 4$ kratnosti 2.

Za vrijednost argumenta x, koja predstavlja rješenje jednačine, odnosno nejednačine, kažemo da **zadovoljava** jednačinu, odnosno nejednačinu.

Ako je x_0 rješenje jednačine $f(x) = g(x)$, onda je $f(x_0) = g(x_0)$, te ako je x_0 rješenje nejednačine $f(x) < g(x)$, odnosno nejednačine $f(x) > g(x)$, onda imamo da vrijedi $f(x_0) < g(x_0)$, odnosno $f(x_0) > g(x_0)$.

Funkcije f i g mogu također zavisiti i od dva ili više argumenata. Tako npr. ako zavise od dva argumenta x i y, onda imamo jednačinu $f(x,y) = g(x,y)$, a pod njenim rješenjem podrazumijevamo uređeni par brojeva (x_0, y_0) za koji vrijedi $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$. U slučaju da funkcije f i g zavise od tri argumenta x, y i z, tada imamo jednačinu $f(x,y,z) = g(x,y,z)$, a pod njenim rješenjem podrazumijevamo uređenu trojku brojeva (x_0, y_0, z_0) za koju vrijedi $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0)$.

Prilikom rješavanja jednačina i nejednačina treba paziti da riješiti jednačinu ili nejednačinu znači odrediti **sva** njena rješenja ili pokazati da ona nema rješenja.

Da bi neka vrijednost x_0 bila rješenje jednačine (a), odnosno nejednačine (b) ili (c), ta vrijednost mora obavezno pripadati području definicije funkcija f i g, tj. mora se moći izračunati i vrijednost $f(x_0)$ i $g(x_0)$.

Definicija 3.2. *Skup svih vrijednosti za koje su oba izraza $f(x)$ i $g(x)$ definirana, nazivamo **područjem definicije** ili **definicionim područjem** jednačine (a), odnosno nejednačina (b) i (c).*

Definiciono područje jednačine, odnosno nejednačine, se dobija kao presjek definicionih područja funkcija $f(x)$ i $g(x)$.

Skup rješenja jednačine (nejednačine) je podskup njenog definicionog područja, pa zaključujemo da jednačina i nejednačina, kojoj je područje definicije prazan skup, nema rješenja. Ako za neko x_0, bar jedan od izraza $f(x_0)$ i $g(x_0)$ nema smisla, onda x_0 ne dolazi u obzir da bude rješenje posmatrane jednačine (nejednačine).

Primjer 3.1. *Odrediti definiciono područje zadanih jednačina i nejednačina.*

a) $2x - 1 = x + 3$

b) $\frac{10}{x} > 7 - x$

c) $\frac{2x-3}{x^2+3x-4} = \frac{9}{7x-x^2}$

d) $8x^2 - 3\sqrt{x-2} < \frac{x+5}{x^2-6x}$

e) $\sqrt{x-3} = \frac{13}{\sqrt{5-x}}$

f) $\log(x-7) = \sqrt{4-x}$

Rješenje:

a) Lijeva strana je definirana za svaki realan broj x. Desna strana je također definirana na cijelom skupu $\mathbb{R}$, pa zaključujemo da je područje definicije ove jednačine cijeli skup $\mathbb{R}$.

b) Lijeva strana je definirana na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a desna strana je definirana na cijelom skupu $\mathbb{R}$, pa zaključujemo da je područje definicije ove nejednačine skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Lijeva strana je definirana na skupu $\mathbb{R}\setminus\{-4, 1\}$, a desna strana je definirana na skupu $\mathbb{R}\setminus\{0, 7\}$, pa zaključujemo da je definiciono područje jednačine skup $\mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 1, 7\}$.

d) Lijeva strana je definirana na skupu $[2, +\infty\rangle$, a desna na $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$, pa je definiciono područje nejednačine skup $[2, 6\rangle \cup \langle 6, +\infty\rangle$.

e) Lijeva strana je definirana na skupu $[3, +\infty\rangle$, a desna na skupu $\langle -\infty, 5\rangle$, pa je definiciono područje nejednačine skup $[3, 5\rangle$.

f) Lijeva strana je definirana na skupu $\langle 7, +\infty\rangle$, a desna na skupu $\langle -\infty, 4]$, pa je definiciono područje jednačine prazan skup.

$\diamondsuit$

Prilikom rješavanja jednačine može nastupiti jedan od sljedeća tri slučaja.

1. Sve vrijednosti x iz definicionog područja jednačine su rješenje dane jednačine.
$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

2. Jednačina nema rješenja.
$$x^2 - 9 = (x - 2)(x + 2) - 3$$

3. Neke vrijednosti x (ali ne sve) iz definicionog područja su rješenje dane jednačine.
$$x^2 - 5x = 0$$

Kao što vidimo, skup rješenja jednačine može biti konačan ili beskonačan.

Napomenimo da sve rečeno za jednačine, vrijedi i za nejednačine. Također istaknimo da prilikom rješavanja jednačina i nejednačina obavezno moramo znati njihovo područje definicije. Tako imamo da jednačina $x^2 + 1 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ ima dva rješenja, i to $x_{1,2} = \pm i$, dok u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ nema rješenja.

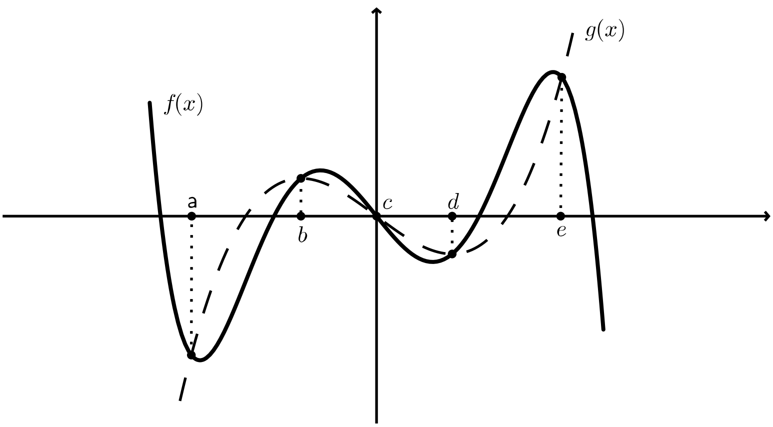
Zbog simetričnosti relacije jednakosti slijedi da je svako rješenje jednačine $f(x) = g(x)$ ujedno i rješenje jednačine $g(x) = f(x)$. Također možemo nejednačinu $f(x) < g(x)$ pisati u obliku $g(x) > f(x)$, dok nejednačinu $f(x) > g(x)$ možemo pisati u obliku $g(x) < f(x)$.

Kako je svako rješenje jednačine $f(x) = g(x)$ ujedno i rješenje jednačine $f(x) - g(x) = 0$, i obratno, to se jednačina $f(x) = g(x)$ uvijek može pisati u obliku $F(x) = 0$. Slično vrijedi i za nejednačine, pa imamo da se nejednačine $f(x) > g(x)$ i $f(x) < g(x)$ uvijek mogu pisati u obliku $F(x) > 0$ ili $F(x) < 0$.

3.3 Grafičko rješavanje jednačina i nejednačina

Predstavimo funkcije $f(x)$ i $g(x)$ grafički. Neka je x_0 jedno rješenje jednačine $f(x) = g(x)$. To znači da je $f(x_0) = g(x_0)$, tj. imamo da su ordinate tačaka na grafovima funkcija $f(x)$ i $g(x)$, čija je apscisa jednaka x_0, također jednake. To znači da je rješenje jednačine $f(x) = g(x)$ apscisa tačke u kojoj se grafovi funkcija f i g sijeku.

Slično možemo opisati grafičko rješavanje nejednačina. Ako je neko x_0 rješenje nejednačine $f(x) < g(x)$, tada je ordinata $f(x_0)$ tačke $(x_0, f(x_0))$, koja se nalazi na grafu funkcije f, manja od ordinate $g(x_0)$ tačke $(x_0, g(x_0))$, koja se nalazi na grafu funkcije g. To znači da se tačka $(x_0, f(x_0))$ na grafu funkcije f nalazi ispod tačke $(x_0, g(x_0))$ na grafu funkcije g, pa zaključujemo da su rješenja nejednačine $f(x) < g(x)$ one vrijednosti x na osi apscisa za koje se graf funkcije f nalazi ispod grafa funkcije g. Analogno imamo da su rješenja nejednačine $f(x) > g(x)$ one vrijednosti x na osi apscisa za koje se graf funkcije f nalazi iznad grafa funkcije g.



Sa slike vidimo da jednačina $f(x) = g(x)$ ima 5 rješenja i to su:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = d, \quad x_5 = e.$$

Rješenje nejednačine $f(x) < g(x)$ je

$$x \in \langle a, b\rangle \cup \langle c, d\rangle \cup \langle e, +\infty\rangle,$$

dok je rješenje nejednačine $f(x) > g(x)$ dano s

$$x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, c\rangle \cup \langle d, e\rangle.$$

3.4 Ekvivalentnost jednačina i nejednačina

Ako posmatramo dvije jednačine (nejednačine) i ako je svako rješenje prve jednačine (nejednačine) ujedno i rješenje druge, onda kažemo da je druga jednačina (nejednačina) **posljedica** prve. Skup rješenja posljedice dane jednačine (nejednačine) sadrži sva rješenja dane jednačine (nejednačine), ali posljedica može imati i rješenja koja nisu i rješenja dane jednačine (nejednačine). Kažemo da su ta rješenja nepoznata za danu jednačinu (nejednačinu). Ako posljedica nema drugih rješenja osim rješenja dane jednačine (nejednačine), onda za nju kažemo da je ekvivalentna s danom.

Definicija 3.3. *Za dvije jednačine (nejednačine) kažemo da su* ***ekvivalentne*** *ako i samo ako imaju jednake skupove rješenja, tj. ako je svako rješenje prve ujedno i rješenje i druge, i obratno.*

Napomena 4. *Za jednačine* $x - 1 = 0$ *i* $(x-1)^2 = 0$ *uzimamo, prema dogovoru, da nisu ekvivalentne, iako imaju isto rješenje* $x = 1$*. Razlog tome je što je rješenje prve jednostruko, a rješenje druge dvostruko.*

Jednačine

$$x - 1 = 0 \qquad \text{i} \qquad x^3 - 1 = 0$$

su ekvivalentne na skupu $\mathbb{R}$ ali ne i na skupu $\mathbb{C}$, jer na skupu $\mathbb{R}$ obje jednačine imaju samo jedno rješenje $x = 1$, dok u skupu $\mathbb{C}$ prva jednačina ima i dalje samo jedno rješenje, i to $x = 1$, a druga ima tri rješenja, i to $x_1 = 1$, $x_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ i $x_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

Prilikom rješavanja jednačina (nejednačina) vrše se tehničke transformacije izraza u njima tako da ih zamjenjujemo nizom ekvivalentnih, ali jednostavnijih, jednačina (nejednačina) sve dok ne dobijemo tzv. riješeni oblik jednačine (nejednačine) iz kojeg neposredno "pročitamo" rješenje. Prilikom rješavanja moramo biti oprezni da ne promijenimo definiciono područje zadane jednačine (nejednačine).

Teorem 3.1. *Ako i jednoj i drugoj strani jednačine (nejednačine) dodamo izraz, koji je definiran u definicionom području jednačine (nejednačine) koju rješavamo, onda dobijamo jednačinu (nejednačinu) koja je ekvivalentna s polaznom.*

Drugim riječima imamo da su jednačine

$$f(x) = g(x) \qquad \text{i} \qquad f(x) \pm h(x) = g(x) \pm h(x),$$

odnosno nejednačine

$$f(x) < g(x) \qquad \text{i} \qquad f(x) \pm h(x) < g(x) \pm h(x),$$

te

$$f(x) > g(x) \qquad \text{i} \qquad f(x) \pm h(x) > g(x) \pm h(x),$$

ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definiran u definicionom području prve jednačine (nejednačine), uz napomenu da $h(x)$ može biti i konstanta.

Ovo je zasnovano na sljedećim osobinama:

$$a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \pm c = b \pm c$$

i

$$a < b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \pm c < b \pm c.$$

Upravo navedeni teorem je osnova za tzv. pravilo **"prenošenja članova"** s jedne na drugu stranu jednačine (nejednačine). Da bismo u jednačini

$$f(x) + g_1(x) = g_2(x)$$

"prenijeli" član $g_1(x)$ na drugu stranu, trebamo i jednoj i drugoj strani dodati izraz $-g_1(x)$, pa dobijamo

$$f(x) + g_1(x) - g_1(x) = g_2(x) - g_1(x),$$

$$f(x) = g_2(x) - g_1(x).$$

Jednačina koju smo dobili iz polazne je ekvivalentna s njom.

Teorem 3.2. *Ako obje strane jednačine pomnožimo izrazom, koji je definiran u definicionom području jednačine i ima vrijednost različitu od nule, onda je dobijena jednačina ekvivalentna s polaznom.*

Drugim riječima imamo da su jednačine

$$f(x) = g(x) \qquad \text{i} \qquad f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$$

ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definiran u definicionom području prve jednačine i ako je $h(x) \neq 0$, uz napomenu da $h(x)$ može biti i konstanta različita od 0.

Ovo je zasnovano na ekvivalenciji

$$a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad ac = bc, \quad c \neq 0.$$

Vidimo da jednačinu možemo uvijek pomnožiti konstantom različitom od nule. Ako jednačinu pomnožimo s nulom, dobijamo identitet zadovoljen za svako x. Množenjem jednačine izrazom koji može biti jednak 0 dobijamo jednačinu koja može imati i neka nova rješenja u odnosu na rješenja polazne jednačine, ili se može povećati kratnost već postojećih rješenja.

Neka za neku vrijednost x_0 u definicionom području jednačine $f(x) = g(x)$ vrijedi $h(x_0) = 0$. Tada je x_0 rješenje jednačine $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ bez obzira na to da li je x_0 rješenje jednačine $f(x) = g(x)$. Ako je x_0 rješenje polazne jednačine, onda je to i rješenje novodobijene jednačine, ali s povećanom kratnošću.

Tako imamo da jednačina $2x + 1 = x$ ima rješenje $x = -1$. Pomnožimo li je s $x - 4$ dobijamo jednačinu $(2x + 1)(x - 4) = x(x - 4)$ koja ima, osim $x_1 = -1$, još jedno rješenja $x_2 = 4$. Ako je pomnožimo s $x + 1$ dobijamo jednačinu $(2x + 1)(x + 1) = x(x + 1)$ kojoj je $x = -1$ jedino, ali sada dvostruko rješenje.

Teorem 3.3. *Ako obje strane jednačine podijelimo izrazom različitim od nule i koji je definiran za sva rješenja te jednačine, onda je dobijena jednačina ekvivalentna s polaznom.*

Napomenimo da jednačinu uvijek možemo podijeliti konstantom različitom od nule.

Slično množenju jednačine, podijelimo li jednačinu izrazom koji može biti jednak 0 možemo ili izgubiti neka rješenja polazne jednačine ili nekim rješenjima smanjiti kratnost.

Znamo da jednačina $(2x + 1)(x - 4) = x(x - 4)$ ima dva rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 4$. Podijelimo li je s $x - 4$ dobijamo jednačinu $2x + 1 = x$ koja ima samo jedno rješenja $x = -1$. Jednačina $(2x + 1)(x + 1) = x(x + 1)$ ima dvostruko rješenje $x = -1$. Ako je podijelimo s $x + 1$ dobijamo jednačinu $2x+1 = x$, kojoj je $x = -1$ također rješenje, ali ne dvostruko nego kratnosti 1.

Teorem 3.4. *Nejednačina $f(x) < g(x)$ je ekvivalentna s nejednačinom*

- $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ *za one vrijednosti x iz definicionog područja prve nejednačine za koje je $h(x) > 0$,*
- $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ *za one vrijednosti x iz definicionog područja prve nejednačine za koje je $h(x) < 0$.*

Napomenimo da nejednačinu možemo uvijek pomnožiti s pozitivnom konstantom, pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja, odnosno s negativnom konstantom pri čemu se znak nejednakosti mijenja.

Teorem 3.5. *Rješenje jednačine*

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x) = 0$$

su one i samo one vrijednosti x za koje bar jedan od faktora $f_i(x) = 0$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, a ostali faktori su definirani za taj x.

Teorem 3.6. *Rješenje nejednačine*

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x) < 0$$

su one i samo one vrijednosti x za koje je tačno neparan broj faktora $f(x_i)$ negativan, tj. za koje je $f_i(x) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, a ostali faktori su definirani za taj x i različiti od nule.

Rješenje nejednačine

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x) > 0$$

su one i samo one vrijednosti x za koje je tačno paran broj faktora $f(x_i)$ negativan, tj. $f_i(x) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, a ostali faktori su definirani za taj x i različiti od nule, ili za koje su svi faktori pozitivni i definirani.

Skup rješenja nejednačine $f(x)g(x) > 0$ je unija rješenja dva sistema nejednačina

$$f(x) > 0, \quad g(x) > 0$$

i

$$f(x) < 0, \quad g(x) < 0,$$

a skup rješenja nejednačine $f(x)g(x) < 0$ je unija rješenja dva sistema nejednačina

$$f(x) > 0, \quad g(x) < 0$$

i

$$f(x) < 0, \quad g(x) > 0.$$

3.5 Jednačine i nejednačine s apsolutnim vrijednostima

Definirajmo još dvije važne elementarne funkcije. To su apsolutna vrijednost i signum (znak ili predznak).

Definicija 3.4. *Realna funkcija realne varijable definirana s*

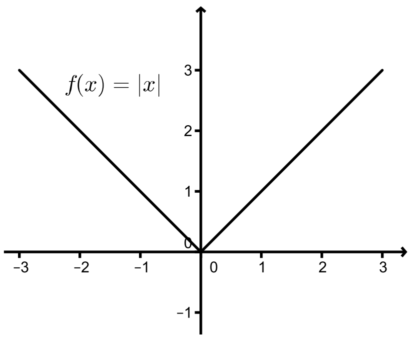
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

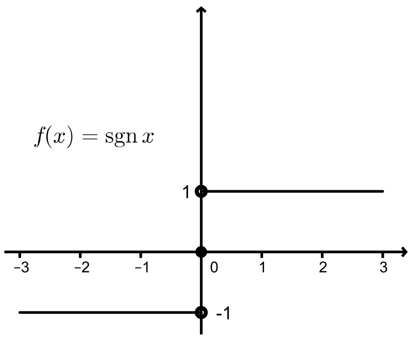
se naziva ***apsolutna vrijednost****.*

Definicija 3.5. *Realna funkcija koja poprima vrijednosti u skupu* $\{-1, 0, 1\}$ *definirana s*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

se naziva ***signum*** *(****znak*** *ili* ***predznak****).*





Apsolutna vrijednost realnog broja x se također definira kao

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

ili

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x.$$

Za apsolutnu vrijednost vrijede sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.7. *Za svaki realan broj x vrijedi:*

1. $|x| \geq 0$,
2. $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

3. $|x| > 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0$,

4. $|-x| = |x|$,

5. $-|x| \leq x \leq |x|$,

6. $|x - y| = |y - x|, \forall y \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.8. *Neka je $a \geq 0$ realan broj. Tada za svaka dva realna broja x i y vrijedi:*

1. $|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a$,

2. $|x| \geq a \;\Leftrightarrow\; ((x \leq -a) \vee (x \geq a))$,

3. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$,

4. $|xy| = |x| \cdot |y|$,

5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Nejednačina

$$|f(x)| < g(x)$$

ima rješenja samo u onoj oblasti u kojoj je $g(x) > 0$ i zadovoljena je za one vrijednosti x za koje je

$$-g(x) < f(x) < g(x).$$

Iz toga slijedi da je rješenje polazne nejednačine presjek rješenja nejednačina

$$f(x) < g(x) \qquad \text{i} \qquad f(x) > -g(x).$$

Rješenje nejednačine

$$|f(x)| > g(x)$$

je unija rješenja nejednačina

$$g(x) < 0, \qquad f(x) > g(x), \qquad f(x) < -g(x).$$

3.6 Linearne jednačine i nejednačine

Ako je izraz $f(x) - g(x)$ polinom prvog stepena, onda jednačinu $f(x) = g(x)$ nazivamo **linearna jednačina**, a nejednačine $f(x) < g(x)$ i $f(x) > g(x)$ nazivamo **linearne nejednačine**.

Kao što znamo, linearna funkcija ima oblik $y = ax + b$. Ako tražimo nultačku te funkcije, tj. onu vrijednost x za koju je izraz na desnoj strani jednak 0, onda dobijamo linearnu jednačinu oblika

$$ax + b = 0.$$

Ako tražimo one vrijednost argumenta x za koje je izraz na desnoj strani pozitivan, odnosno negativan, onda dobijemo linearnu nejednačinu

$$ax + b > 0 \qquad \text{ili} \qquad ax + b < 0.$$

Jednačina $ax + b = 0$ je ekvivalentna s jednačinom

$$ax = -b.$$

Prilikom njenog rješavanja mogu nastupiti sljedeća 3 slučaja.

1. $a \neq 0$

   Tada jednačina ima jedinstveno rješenje

   $$x = -\frac{b}{a}.$$

2. $a = 0,\ b \neq 0$

   Tada imamo

   $$0 \cdot x \neq 0$$

   što nije ispunjeno niti za jedno $x \in \mathbb{R}$, pa u tom slučaju jednačina nema rješenja.

3. $a = 0,\ b = 0$

   Tada imamo $0 \cdot x = 0$ što je ispunjeno za sve $x \in \mathbb{R}$, pa u tom slučaju jednačina ima beskonačno mnogo rješenja i svako $x \in \mathbb{R}$ je njeno rješenje.

Primjer 3.2. *U zavisnosti od vrijednosti parametra m diskutovati rješenje jednačine*

$$m(2x-1)+mx(m+4)=m^2.$$

Rješenje: Vidimo da je definiciono područje jednačine cijeli skup $\mathbb{R}$, tj. $x \in \mathbb{R}$. Također vidimo da nema uvjeta na vrijednost parametra m, pa imamo da $m \in \mathbb{R}$.

Sredimo li jednačinu, dobijamo

$$2mx - m + m^2x + 4mx = m^2,$$

$$(m^2+6m)x = m^2+m,$$

$$m(m+6)x = m(m+1).$$

Razlikujemo sljedeća 3 slučaja.

1. Ako je $m(m+6) \neq 0$, tj. ako je $m \neq 0$ i $m \neq -6$, onda jednačina ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{m(m+1)}{m(m+6)} = \frac{m+1}{m+6}.$$

2. Ako je $m = 0$, tada imamo jednačinu

$$0 \cdot x = 0,$$

što je zadovoljeno za svaki realan broj x, pa zaključujemo da jednačina ima beskonačno mnogo rješenja i da je svako $x \in \mathbb{R}$ rješenje dane jednačine.

3. Ako je $m = -6$, tada imamo jednačinu

$$0 \cdot x = 30,$$

što nije zadovoljeno za $x \in \mathbb{R}$ pa jednačina nema rješenja.

$\diamondsuit$

Primjer 3.3. *U zavisnosti od vrijednosti parametara a i b diskutovati rješenje jednačine*

$$(a^2 - b^2)x = a - b.$$

Rješenje: Vidimo da je definiciono područje jednačine cijeli skup $\mathbb{R}$, tj. $x \in \mathbb{R}$. Također vidimo da nema uvjeta na vrijednosti parametara a i b, pa imamo da $a, b \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo sljedeća 3 slučaja.

1. Pogledajmo slučaj kada je $a^2 - b^2 \neq 0$. To vrijedi kada je $a \neq b$ i $a \neq -b$. Tada jednačina ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

2. Ako je $a = b$, imamo da je

$$0 \cdot x = 0,$$

što je zadovoljeno za svaki realan broj x, pa zaključujemo da jednačina ima beskonačno mnogo rješenja i da je svako $x \in \mathbb{R}$ rješenje dane jednačine.

3. Ako je $a = -b$, tada imamo dvije mogućnosti.

   a) Neka je $a = 0$. Tada je i $b = 0$ pa dobijamo jednačinu

$$0 \cdot x = 0$$

   kojoj je svako $x \in \mathbb{R}$ rješenje. (Vidimo da je ovo kao u drugom slučaju, jer je i ovo slučaj $a = b$.)

   b) Ako je $a \neq 0$, onda imamo jednačinu

$$0 \cdot x = 2a$$

   koja nema rješenja.

$\diamondsuit$

Primjer 3.4. *U zavisnosti od vrijednosti parametra c diskutovati rješenje jednačine*

$$\frac{c+x}{cx} = \frac{1}{c} + \frac{c}{c+x}.$$

Rješenje: Vidimo da mora biti

$$cx \neq 0, \quad c \neq 0 \quad \text{i} \quad c+x \neq 0,$$

tj.

$$c \neq 0, \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad x \neq -c,$$

pa zaključujemo da je definiciono područje jednačine skup $\mathbb{R} \setminus \{0, -c\}$, tj. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -c\}$. Također vidimo da postoji uvjet na vrijednost parametra c, pa imamo da $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Uz navedene uvjete, nakon množenja jednačine s $cx(c+x)$ i sređivanja, dobijamo jednačinu

$$c(c-1)x = c^2.$$

Razlikujemo sljedeća dva slučaja.

1. Ako je $c(c-1) \neq 0$, tj. ako je $c \neq 1$ (prema početnim uvjetima imamo da mora biti $c \neq 0$), onda jednačina ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{c^2}{c(c-1)} = \frac{c}{c-1}.$$

2. Ako je $c = 1$, tada imamo jednačinu

$$0 \cdot x = 1,$$

pa zaključujemo da jednačina nema rješenja

♢

Linearna nejednačina se pojavljuje u jednom od sljedeća dva oblika

$$ax + b > 0 \qquad \text{i} \qquad ax + b < 0.$$

Analizirajmo prvi slučaj, tj. $ax + b > 0$.

1. Ako je $a > 0$, onda dijeleći nejednačinu s a dobijamo da joj je rješenje

$$x > -\frac{b}{a}, \text{ tj. } x \in \langle -b/a, +\infty \rangle.$$

2. Ako je $a < 0$, onda dijeleći nejednačinu s a dobijamo da joj je rješenje
$$x < -\frac{b}{a}, \text{ tj. } x \in \langle -\infty, -b/a\rangle.$$
3. Ako je $a = 0$ i $b > 0$, onda je nejednačina zadovoljena za svako $x \in \mathbb{R}$.
4. Ako je $a = 0$ i $b < 0$, onda nejednačina nije zadovoljena niti za jedno $x \in \mathbb{R}$, tj. nejednačina nema rješenja.

Analizirajmo sada drugi slučaj, tj. $ax + b < 0$.

1. Ako je $a > 0$, onda dijeleći nejednačinu s a dobijamo da joj je rješenje
$$x < -\frac{b}{a}, \text{ tj. } x \in \langle -\infty, -b/a\rangle.$$
2. Ako je $a < 0$, onda dijeleći nejednačinu s a dobijamo da joj je rješenje
$$x > -\frac{b}{a}, \text{ tj. } x \in \langle -b/a, +\infty\rangle.$$
3. Ako je $a = 0$ i $b > 0$, onda nejednačina nije zadovoljena niti za jedno $x \in \mathbb{R}$, tj. nejednačina nema rješenja.
4. Ako je $a = 0$ i $b < 0$, onda je nejednačina zadovoljena za svako $x \in \mathbb{R}$.

Poglavlje 4

Stepeni i korijeni

4.1 Stepeni s prirodnim i cijelim eksponentom

Definicija 4.1. *Neka je a realan i n prirodan broj. Proizvod od n faktora, od kojih je svaki jednak a, se označava s a^n.*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

Izraz a^n se naziva ***stepen*** *ili* ***potencija****. Realni broj a se naziva* ***baza*** *(****osnova, osnovica****) stepena (potencije) a^n, a prirodan broj n se naziva* ***eksponent*** *(****izložilac****) stepena (potencije) a^n.*

Ako je eksponent stepena a^n jednak 1, dobijamo a^1 i vrijedi

$$a^1 = a.$$

Dalje se induktivno nastavlja i imamo da vrijedi

$$a^{n+1} = a^n \cdot a, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ako su baze dva stepena suprotni brojevi, a eksponenti isti paran broj, onda su ta dva stepena jednaka, tj. vrijedi

$$(-a)^{2n} = a^{2n}.$$

Ako su baze dva stepena suprotni brojevi, a eksponenti isti neparan broj, onda su ta dva stepena suprotni brojevi, tj. vrijedi

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Stepene možemo sabirati, oduzimati, množiti, stepenovati i dijeliti. Sabiramo ih i oduzimamo tako da ih svodimo na stepene jednakih baza i jednakih eksponenata, pa vrijedi

$$ka^n + la^n = (k+l)a^n \qquad \text{i} \qquad ka^n - la^n = (k-l)a^n,\ k, l \in \mathbb{R}.$$

Proizvod stepena jednakih baza je stepen iste baze, čiji je eksponent zbir eksponenata stepena koje množimo, tj. vrijedi

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Proizvod dva stepena različitih baza i jednakih eksponenata je stepen s istim eksponentom i bazom koja je jednaka proizvodu baza stepena koji se množe, tj. vrijedi

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Stepen stepena je jednak stepenu s istom bazom i eksponentom koji je jednak proizvodu danih eksponenata, tj. vrijedi

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Količnik dva stepena jednakih eksponenata jedanak je stepenu s istim eksponentom kojem je baza količnik baza djeljenika i djelitelja, tj. vrijedi

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0.$$

Dijeljenje stepena jednakih baza se svodi na kraćenje razlomaka.

$$a^m : a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}}$$

Imamo tri mogućnosti.

1. Ako je $m > n$ onda je $a^m : a^n = a^{m-n}$.
2. Ako je $m = n$ onda je $a^m : a^n = 1$.
3. Ako je $m < n$ onda je $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$.

Očito je da se pri dijeljenju stepena javlja potreba za uvođenjem stepena čiji je eksponent negativan cijeli broj ili 0. Za realan broj $a \neq 0$ i prirodan broj n definiramo

$$a^0 = 1 \qquad \text{i} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Sada možemo definirati količnik dva stepena jednakih baza kao stepen iste baze kojem je eksponent razlika eksponenata djeljenika i djelitelja, tj. vrijedi

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \ a \neq 0.$$

Za stepen količnika (razlomka) s negativnim eksponentom vrijedi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a, b \neq 0.$$

Često se događa da u jednom zadatku treba izvesti operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i stepenovanja. Operacije sabiranja i oduzimanja smatramo operacijama prvog reda, množenja i dijeljenja operacijama drugog a stepenovanja trećeg reda. Prilikom računanja vrijedi sljedeći dogovor.

1. Operacije istog reda se izvršavaju onim redom kojim su navedene, ako zagradama nije određeno šta treba prije uraditi.
2. Operacije višeg reda se izvršavaju prije operacija nižeg reda, ako zagradama nije određeno šta treba prije uraditi.
3. Ako u nekom izrazu ima više zagrada, prvo se obavljaju operacije u zagradama unutar kojih nema drugih zagrada.

4.2 Korijeni

Neka je sada a bilo koji realan broj i n prirodan broj veći od 1. Pogledajmo u skupu realnih brojeva jednačinu

$$x^n = a$$

za različite vrijednosti a i n. Ova jednačina se naziva **binomna jednačina**.

Ako je $a = 9$ i $n = 2$ tada imamo jednačinu $x^2 = 9$ koja ima dva rješenja, i to $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$.

Ako je $a = 8$ i $n = 3$ tada imamo jednačinu $x^3 = 8$ koja ima samo jedno rješenje, i to $x = 2$.

Ako je $a = -9$ i $n = 2$ tada imamo jednačinu $x^2 = -9$ koja nema rješenja u skupu $\mathbb{R}$.

Ako je $a = -8$ i $n = 3$ tada imamo jednačinu $x^3 = -8$ koja ima jedno rješenje, i to $x = -2$.

Općenito imamo, kada je $a \in \mathbb{R}$ i n neparan prirodan broj tada se grafovi funkcija $y = a$ i $y = x^n$ sijeku u tačno jednoj tački. Kada je $a > 0$ onda se sijeku u tački čija je apscisa pozitivan broj, kada je $a = 0$ onda u tački čija je apscisa 0, a kada je $a < 0$ u tački čija je apscisa negativan broj. Iz toga zaključujemo da u tom slučaju jednačina $x^n = a$ ima jedinstveno rješenje, koje u zavisosti od a može biti pozitivno, negativno ili 0.

Kada je n paran prirodan broj tada se za $a > 0$ grafovi funkcija $y = a$ i $y = x^n$ sijeku u dvije tački koje su simetrične u odnosu na osu y. Apscise tih tačaka predstavljaju rješenja jednačine $x^n = a$ i to su suprotni brojevi (jedan pozitivan, a drugi negativan). Kada je $a < 0$ grafovi se ne sijeku i jednačina nema rješenja, a kada je $a = 0$ presjek je u tački čija je apscisa 0, što i predstavlja rješenje jednačine.

Vidimo kada je $a < 0$ da jednačina $x^n = a$ ima rješenje (i to jedinstveno) samo u slučaju kada je n neparan prirodan broj. To jedinstveno rješenje se naziva **n–ti korijen broja** a ili **n–ti korijen iz broja** a.

Za paran broj n imamo problem i kada je $a < 0$ (nema rješenja) i kada je $a > 0$ (imamo dva rješenja pa rješenje nije jedinstveno). Kako ne treba poistovjećivati rješavanje jednačina i rad s funkcijama, jer funkcija mora biti definirana za svaki element domene i svakom elementu domene se smije pridružiti tačno jedan element kodomene, to imamo sljedeću definiciju.

Definicija 4.2. *Za svaki nenegativan realan broj a $(a \geq 0)$ i za svaki prirodan broj $n > 1$ postoji jedan i samo jedan nenegativan realan broj b $(b \geq 0)$ takav da je*

$$b^n = a.$$

*Taj broj b se naziva **n–ti aritmetički korijen broja** a (ili iz broja a) i pišemo*

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Iz definicije slijedi da za nenegativan realan broj a i prirodan broj $n > 1$ vrijedi

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

U izrazu $\sqrt[n]{a}$ se prirodan broj n naziva **eksponent** ili **stepen korijena**, a broj a se naziva **radikand** ili **potkorjena veličina**.
Napomenimo kada je $n = 1$, onda se korijen izostavlja i umjesto $\sqrt[1]{a}$ pišemo samo a, dok u slučaju kada je $n = 2$, izostavlja se pisanje eksponenta korijena, te umjesto $\sqrt[2]{a}$ pišemo $\sqrt{a}$.

Neka su a i b nenegativni realni brojevi, n i k prirodni brojevi veći od 1, te m prirodan broj. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Proizvod n–tih korijena nenegativnih realnih brojeva je jednak n–tom korijenu proizvoda tih brojeva. Drugim riječima, imamo da je n–ti korijen proizvoda nenegativnih realnih brojeva jednak proizvodu n–tih korijena tih brojeva, tj. vrijedi
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

2. Količnik n–tih korijena nenegativnih realnih brojeva je jednak n–tom korijenu količnika tih brojeva. Drugim riječima, imamo da je n–ti korijen količnika nenegativnih realnih brojeva jednak količniku n–tih korijena tih brojeva, tj. vrijedi
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0.$$

3. Stepenovanje n–tog korijena prirodnim brojem k provodi se tako da se radikand stepenuje brojem k, a zatim se iz tako dobijenog novog radikanda odredi n–ti korijen, tj. vrijedi
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

4. n–ti korijen iz k–tog korijena nenegativnog realnog broja je jednak $(n \cdot k)$–tom korijenu tog broja, tj. vrijedi
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}.$$

5. Ako su eksponent korijena i eksponent radikanda djeljivi istim prirodnim brojem, onda se vrijednost korijena ne mijenja ako se i eksponent korijena i eksponent radikanda podijele tim brojem, tj. vrijedi
$$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

   Ovaj se postupak naziva **skraćivanje korijena**.

6. Ako prethodnu jednakost napišemo obratno, onda imamo da se vrijednost korijena ne mijenja ako se i eksponent korijena i eksponent radikanda pomnože istim prirodnim brojem, tj. vrijedi

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}.$$

   Ovaj se postupak naziva **proširivanje korijena**.

Za svaki prirodan broj $n > 1$ vrijedi

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \text{i} \qquad \sqrt[n]{1} = 1.$$

Definicija 4.3. ***Kvadratni (drugi) korijen*** *nenegativnog realnog broja a je nenegativan realan broj $\sqrt{a}$ za koji vrijedi*

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Za bilo koji realan broj a vrijedi

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

i općenito

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, \ k \in \mathbb{N}.$$

Ako se pri radu s korjenima dobije izraz u kojem se pojavljuje razlomak čiji nazivnik sadrži korijen, onda se algebarskim transformacijama takav razlomak može svesti na oblik u čijem nazivniku neće biti korjena. Ovo se radi da bi se izbjeglo dijeljenje s iracionalnim brojevima. Postupak uklanjanja iracionalnog broja ili iracionalnog izraza iz nazivnika razlomka se naziva **racionalizacija** ili **racionalisanje nazivnika**. Napomenimo da se u nekim slučajevima vrši i racionalizacija brojnika.

Algebarske izraze u kojima se pojavljuju korijeni smatramo sređenim ako vrijedi:

1. Eksponenti svih faktora u radikandu su manji od eksponenta korijena;

2. Korijeni se ne nalaze u nazivnicima razlomaka;

3. Najveći zajednički djelitelj eksponenta korijena i eksponenta radikanda je jednak 1.

4.3 Stepeni s racionalnim eksponentom

Do sada smo definirali stepen a^n za prirodne i cijele eksponente n. Sada bismo htjeli proširiti pojam stepena tako da eksponent može biti i racionalan broj, ali pod uvjetom da vrijede pravila koja vrijede i za stepene s prirodnim i cijelim eksponentima.

Neka je a pozitivan realan broj i $\frac{m}{n}$ racionalan broj, gdje je $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada stepen s racionalnim eksponentom m/n definiramo kao

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ako je $m = 1$, onda je

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

a ako je $n = 1$, onda je

$$a^{\frac{m}{n}} = a^m.$$

U slučaju da je $a = 0$ i $m/n > 0$, onda je

$$a^{\frac{m}{n}} = 0.$$

Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda za sve racionalne brojeve r i s vrijedi:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$,
3. $(a^r)^s = a^{rs}$,
4. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$,
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$,

Također imamo da za pozitivne realne brojeve a i b, te pozitivan racionalan broj r vrijedi

$$a < b \qquad \Leftrightarrow \qquad a^r < b^r.$$

Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{nzd}(m,n) = 1,$$

onda za njenu domenu $\mathcal{D}_f$ vrijedi

$$\mathcal{D}_f = \begin{cases} [0, +\infty\rangle, & n \text{ paran i } m > 0, \\ (0, +\infty\rangle, & n \text{ paran i } m < 0, \\ \mathbb{R}, & n \text{ neparan i } m > 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}, & n \text{ neparan i } m < 0. \end{cases}$$

U slučaju kada je n paran broj, onda funkcija f nije ni parna ni neparna, a kada je n neparan broj, onda je funkcija f parna ako je m paran, a neparna ako je m neparan.

Poglavlje 5

Logaritmi

5.1 Pojam i definicija logaritma

Računajući vrijednost eksponencijalne funkcije $y = b^x$, $(0 < b \neq 1)$ mi odgovaramo na pitanje kolika je vrijednost stepena b^x za zadani broj x. U jednakosti $y = b^x$ imamo tri veličine: b, x i y, i u ovom slučaju su nam poznati baza b i eksponent x, dok vrijednost stepena $y = b^x$ određujemo.

Ako su poznate vrijednosti eksponenta x i stepena y, onda se baza b određuje postupkom korjenovanja, tj. imamo da je $b = \sqrt[x]{y}$, što je ekvivalentno stepenovanju s recipročnim eksponentom $a = y^{\frac{1}{x}}$.

Pogledamo li treću mogućnost, tj. kada su zadane vrijednosti baze b i stepena $y = b^x$, onda se postavlja pitanje koliki je eksponent x u jednakosti $y = b^x$, tj. čime treba stepenovati bazu b da bismo dobili $y = a^x$.

Pogledajmo jednačinu

$$b^x = a, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

1. Za $a = b = 0$ jednačina (5.1) je oblika $0^x = 0$ i njeno je rješenje svaki pozitivan realan broj.

2. Za $a = 0$ i $b \neq 0$ jednačina (5.1) je oblika $b^x = 0$ i ona nema rješenja.

3. Za $a \neq 0$ i $b = 0$ jednačina (5.1) je oblika $0^x = a$ i ona također nema rješenja.

4. Za $a < 0$ i $b < 0$ jednačina (5.1) nekada ima, a nekada nema rješenja. Tako imamo da jednačina $(-2)^x = -4$ nema rješenja, dok jednačina $(-2)^x = -8$ ima jedno rješenje $x = 3$.

5. Za $a < 0$ i $b > 0$ jednačina (5.1) nema rješenja.

6. Za $a > 0$ i $b < 0$ jednačina (5.1) nekada ima, a nekada nema rješenja. Tako imamo da jednačina $(-2)^x = 8$ nema rješenja, dok jednačina $(-2)^x = 4$ ima jedno rješenje $x = 2$.

7. Za $a = b = 1$ jednačina (5.1) je oblika $1^x = 1$ i njeno je rješenje svaki realan broj.

8. Za $a = 1$ i $0 < b \neq 1$ jednačina (5.1) je oblika $b^x = 1$ i ona ima jedinstveno rješenje $x = 0$.

9. Za $0 < a \neq 1$ i $b = 1$ jednačina (5.1) je oblika $1^x = a$ i ona nema rješenja.

10. Za $0 < a \neq 1$ i $0 < b \neq 1$ jednačina (5.1), zbog injektivnosti eksponencijalne funkcije, ima jedinstveno rješenje u skupu realnih brojeva.

Vidimo da jednačina (5.1) ima jedinstveno rješenje samo u slučajevima 8 i 10, tj. kada je $a > 0$ i $0 < b \neq 1$. To jedinstveno rješenje se naziva logaritam broja a za bazu (u bazi, po bazi) b.

Definicija 5.1. *Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a > 0$ i $0 < b \neq 1$. Realan broj x kojim treba stepenovati broj b da bi se dobio broj a, tj. za koji vrijedi $b^x = a$ nazivamo* ***logaritam*** *broja a po bazi (u bazi, za bazu) b. Taj broj označavamo s*

$$x = \log_b a.$$

Vrijedi

$$x = \log_b a \qquad \Leftrightarrow \qquad b^x = a, \quad (a > 0,\ 0 < b \neq 1).$$

Operacija kojom se iz zadane baze i stepena određuje eksponent naziva se **logaritmiranje**.

Prisjetimo se da se pri zapisu dekadskog logaritma, tj. logaritma s bazom 10, baza izostavlja i jednostavno piše $\log a$, te vrijedi

$$x = \log a \qquad \Leftrightarrow \qquad 10^x = a, \quad (a > 0),$$

a da se pri zapisu prirodnog logaritma koristi oznaka ln i vrijedi

$$x = \ln a \qquad \Leftrightarrow \qquad e^x = a, \quad (a > 0).$$

5.2 Osobine logaritama

Iz definicije logaritma slijedi da vrijedi

$$b^{\log_b a} = a \qquad \text{i} \qquad \log_a(a^x) = x.$$

Također imamo da vrijedi

$$\log_b 1 = 0 \qquad \text{i} \qquad \log_b b = 1.$$

Neka su x, y, b i k realni brojevi takvi da je $x, y, b > 0$ i $b \neq 1$. Tada vrijede tzv. pravila logaritmiranja:

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$,
2. $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$,
3. $\log_b(x^k) = k \cdot \log_b x$.

Zbog monotonosti logaritamske funkcije, imamo da za $b > 1$ vrijedi

$$\log_b x_1 < \log_b x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 < x_2,$$

dok za $0 < b < 1$ vrijedi

$$\log_b x_1 < \log_b x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 > x_2.$$

Za svaku bazu $0 < b \neq 1$ vrijedi

$$\log_b x_1 = \log_b x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Prilikom rada s logaritmima vrlo često se javlja potreba za promjenom zadane baze i prelazak na neku drugu bazu, pa imamo da vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $\log_b a = \log_{b^n} a^n, \quad a > 0,\ 0 < b \neq 1,\ n \in \mathbb{N}$,
2. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1$,
3. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \quad 0 < b \neq 1,\ 0 < c \neq 1,\ a > 0$,

4. $\log_{b^k} a = \frac{1}{k} \cdot \log_b a, \quad a > 0,\ 0 < b \neq 1,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Iskoristimo li navedene relacije, možemo odrediti vezu između dekadskog i prirodnog logaritma.

$$\begin{aligned} \ln x &= \frac{\log x}{\log e} \approx \frac{\log x}{0,43429} \approx 2,3026 \log x \\ \log x &= \frac{\ln x}{\ln 10} \approx \frac{\ln x}{2,3026} \approx 0,43429 \ln x \end{aligned}$$

Poglavlje 6

Brojevne sredine

6.1 Dokazi nekih nejednakosti

Stari Grci, koji su svoja prva matematička znanja preuzeli od Egipćana, su tokom vremena sakupili veliko znanje i razvili istraživačke metode, pa su oni primjenom tih metoda u punom smislu riječi matematiku razvili kao nauku. Analiza i sinteza su najranije otkrivene i primjenjivane metode naučnog mišljenja. Pappus Aleksandrijski (jedan od posljednjih starogrčkih matematičara, živio početkom IV stoljeća) razmatra analizu i sintezu teorijski i na taj način uvodi u matematiku ravnopravno obje metode. Analiza je naučna metoda istraživanja koja se zasniva na raščlanjivanju cjeline na dijelove, proučavanju dijelova i izvođenju zaključaka o cjelini na osnovu dobijenih rezultata. Sinteza je njena suprotnost. Za analizu Pappus kaže da ona pretpostavlja da je tačno ono što se traži. Ako se na osnovu toga dođe do nečega što je očito istinito ili moguće, onda je tvrdnja dokazana ili je problem riješen. Ako se dođe do nečega što je očito neistinito ili nemoguće, onda je tvrdnja neistinita ili problem nema rješenje, tj. nemoguć je. Sintezu definira kao obrnut proces u kojem se kao učinjeno uzima ono što je u analizi posljednje dostignuto. Međutim, iako se analiza i sinteza bitno razlikuju po načelu pristupa problemu, one su praktično nedjeljive jedna

od druge, nadopunjuju se i čine jedinstvenu analitičko – sintetičku metodu.
Dva matematička izraza povezana znakom $>, <, \geq, \leq$ ili $\neq$ čine jednu **nejednakost**. Nejednakost koja ne sadrži promjenljivu (varijablu) naziva se **aritmetička** ili **brojevna** nejednakost, a ona koja ih sadrži se naziva **algebarska** nejednakost.
Dokazati algebarsku nejednakost znači dokazati da je jedan od danih algebarskih izraza veći ili manji od dugog za sve vrijednosti promjenljivih ili za dane uvjete.
Dokazivanje nejednakosti je veoma interesantno područje matematike, a u teoriji nejednakosti posebno mjesto zauzimaju nejednakosti između brojevnih sredina i njihove primjene.

Primjer 6.1. *Dokazati da za svaka dva realna broja x i y vrijedi*

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Rješenje: Krenut ćemo od poznate nejednakosti (sinteza). Znamo da za svaki realan broj a vrijedi $a^2 \geq 0$, a kako su x i y realni brojevi onda to možemo iskoristiti.

$$\begin{aligned} & (x-y)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 \geq 2xy \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.2. *Dokazati da za svaka dva pozitivna realna broja x i y vrijedi*

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Rješenje: Podijelimo li, prethodno dokazanu, nejednakost $x^2 + y^2 \geq 2xy$ s $xy > 0$ dobijamo

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.3. *Dokazati da za svaki pozitivan realan broj a vrijedi*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Rješenje: Uvrstimo li u, prethodno dokazanu, nejednakost smjenu $a = x/y$ dobijamo

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = 1$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.4. *Dokazati da za svaka dva pozitivna realna broja x i y vrijedi*

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Rješenje: Krenut ćemo od zadane nejednakosti i pokušati doći do ekvivalentne nejednakosti koja je tačna (analiza).

$$\begin{aligned} & x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \Leftrightarrow \quad & x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.5. *Dokazati da za svaka tri pozitivna realna broja a, b i c vrijedi*

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Rješenje: Za bilo koja tri pozitivna realna broja a, b i c postoje pozitivni realni brojevi x, y i z, takvi da je $a = x^3$, $b = y^3$ i $c = z^3$. Znamo da za takve brojeve x, y i z vrijedi $(x-y)^2 \geq 0$, $(y-z)^2 \geq 0$ i $(z-x)^2 \geq 0$, pa to možemo i iskoristiti.

$$\begin{aligned} & (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz + yz)] \geq 0 \quad | \cdot (x + y + z) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(x + y + z)[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz + yz)] \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \geq 0 \quad | : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \end{aligned}$$

Kako je $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ i $z = \sqrt[3]{c}$, to iz posljednje nejednakosti slijedi da je

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.6. *Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve x, y i z vrijedi*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

Rješenje: Prema Primjeru 6.1 znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 2xy, \\ x^2 + z^2 &\geq 2xz, \\ y^2 + z^2 &\geq 2yz. \end{aligned}$$

Saberemo li lijeve i desne strane dobijamo

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + xz + yz),$$

pa nakon dijeljenja s 2 dobijamo

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.7. *Dokazati da za svaka dva pozitivna realna broja x i y, takva da je $x \leq y$, vrijedi*

$$x \leq \frac{2xy}{x + y}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} & x \leq \frac{2xy}{x+y} \quad \Big| \cdot (x+y) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + xy \leq 2xy \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \leq xy \quad \big| : x > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq y \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.8. *Dokazati da za svaka dva pozitivna realna broja x i y vrijedi*

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
& \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \quad \Big| \cdot (x+y) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2xy \leq (x+y)\sqrt{xy} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{xy}(2\sqrt{xy}) \leq (x+y)\sqrt{xy} \quad | : \sqrt{xy} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{xy} \leq x+y \\
\Leftrightarrow \quad & x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.9. *Dokazati da za svaka dva pozitivna realna broja x i y vrijedi*

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \Big|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \quad \Big| \cdot 4 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2+y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-y)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.10. *Dokazati da za svaka dva pozitivna realna broja x i y, takva da je $x \leq y$, vrijedi*

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq y.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq y \quad \Big|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^2+y^2}{2} \leq y^2 \quad \Big| \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2 \leq 2y^2) \quad | -y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \leq y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq y \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

$\diamondsuit$

6.2 Nejednakosti između brojevnih sredina

Definicija 6.1. *Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dana n–torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je:*

Aritmetička sredina *$A_n(x)$ brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ definirana izrazom*

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n};$$

Geometrijska sredina *$G_n(x)$ brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ definirana izrazom*

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n};$$

Harmonijska sredina *$H_n(x)$ brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ definirana izrazom*

$$H_n(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}};$$

Kvadratna sredina *$K_n(x)$ brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ definirana izrazom*

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Teorem 6.1 (AG nejednakost)**.** *Neka je* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dana* n*-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$A_n(x) \geq G_n(x).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Dokaz: Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije. Za $n = 2$ tvrdnja glasi

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

što smo dokazali u Primjeru 6.4.

Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neko $n = k \geq 2$, tj. da vrijedi

$$A_k(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k} = G_k(x), \tag{6.1}$$

pa dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$, tj. da vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}}{k + 1} \geq \sqrt[k+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}}.$$

Stavimo li da je

$$A = \frac{x_{k+1} + (k - 1)A_{k+1}}{k},$$

onda je A aritmetička sredina k brojeva, od kojih je njih $k - 1$ jednako A_{k+1}, a jedan je jednak x_{k+1}. Primijenimo li pretpostavku indukcije na tih k brojeva, tj. pretpostavku da AG nejednakost vrijedi za k pozitivnih realnih brojeva, onda imamo da je

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_{k+1} + (k - 1)A_{k+1}}{k} \\ &\geq \sqrt[k]{x_{k+1} \cdot A_{k+1} \cdot A_{k+1} \cdot \ldots \cdot A_{k+1}} \\ &= \sqrt[k]{x_{k+1}(A_{k+1})^{k-1}} \\ &= \left(x_{k+1}(A_{k+1})^{k-1}\right)^{1/k}. \end{aligned}$$

Stavimo li da je

$$G = \left(x_{k+1}(A_{k+1})^{k-1}\right)^{1/k},$$

dobijamo da je

$$A \geq G. \tag{6.2}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} + \frac{x_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= 2A_{k+1}, \end{aligned}$$

pa smo dobili da je

$$A_{k+1} = \frac{A_k + A}{2}.$$

Kako vrijedi AG nejednakost za dva broja, to je

$$A_{k+1} = \frac{A_k + A}{2} \geq (A_k A)^{1/2},$$

pa primjenjujući (6.1) i (6.2) dobijamo da je

$$\begin{aligned} A_{k+1} &\geq (A_k A)^{1/2} \\ &\geq (G_k G)^{1/2} = ((G_k G)^k)^{\frac{1}{2k}} = ((G_k)^k G^k)^{\frac{1}{2k}} \\ &= \left((G_k)^k \cdot \left(\left(x_{k+1} \cdot (A_{k+1})^{k-1} \right)^{1/k} \right)^k \right)^{\frac{1}{2k}} \\ &= \left((G_k)^k \cdot x_{k+1} \cdot (A_{k+1})^{k-1} \right)^{\frac{1}{2k}} \\ &= \left(x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} \cdot (A_{k+1})^{k-1} \right)^{\frac{1}{2k}} \\ &= \left((G_{k+1})^{k+1} \cdot (A_{k+1})^{k-1} \right)^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$A_{k+1} \geq \left((G_{k+1})^{k+1} \cdot (A_{k+1})^{k-1} \right)^{\frac{1}{2k}},$$

pa nakon stepenovanja s $2k$ dobijamo

$$(A_{k+1})^{2k} \geq (G_{k+1})^{k+1} \cdot (A_{k+1})^{k-1}.$$

Podijelimo li posljednju nejednakost s $(A_{k+1})^{k-1} > 0$ dobijamo da je

$$(A_{k+1})^{k+1} \geq (G_{k+1})^{k+1},$$

iz čega slijedi da je

$$\Rightarrow A_{k+1} \geq G_{k+1},$$

čime je nejednakost dokazana.

Sada još trebamo dokazati da jednakost nastupa ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Prepostavimo li da je $x_1 = \cdots = x_n$, tada je jednakost očigledno zadovoljena i imamo da vrijedi

$$A_n(x) = G_n(x).$$

Pogledajmo obrat. Pretpostavimo li da su bar dva od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ različiti, na primjer, neka je $x_1 \neq x_2$, tada je

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2} + x_3 + \cdots + x_n}{n} \\
&\geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{1/n} \\
&= \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\right]^{1/n} \\
&> (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^{1/n},
\end{aligned}$$

jer je

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}, \quad \text{za } x_1 \neq x_2.$$

□

Teorem 6.2 (GH nejednakost)**.** *Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dana n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$G_n(x) \geq H_n(x).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz: Trebamo dokazati da vrijedi

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Primijenimo li AG nejednakost na brojeve $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, dobijamo

$$\left(\frac{1}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n},$$

tj.

$$\left(\frac{1}{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n},$$

iz čega slijedi da je

$$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

što je tvrdnja teorema.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{1}{x_1} = \cdots = \frac{1}{x_n},$$

tj. ako i samo ako je

$$x_1 = \cdots = x_n.$$

□

Teorem 6.3 (AK nejednakost)**.** *Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dana n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$A_n(x) \le K_n(x).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz: Trebamo dokazati da vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Poznato je da vrijedi

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n).$$

Kako je, prema Primjeru 6.1, $2ab \le a^2 + b^2$, to je

$$\begin{aligned}
(x_1 + \cdots + x_n)^2 &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n) \\
&\le x_1^2 + \cdots + x_n^2 + ((x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_3^2) + \cdots + (x_{n-1}^2 + x_n^2)) \\
&= n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).
\end{aligned}$$

Dobili smo da je

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

pa nakon korjenovanja imamo

$$x_1 + \cdots + x_n \leq \left[n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right]^{1/2}.$$

Podijelimo li posljednju nejednakost s n dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &\leq \frac{\sqrt{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}}{n} \\ &= \sqrt{\frac{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}, \end{aligned}$$

čime je nejednakost dokazana.

Sada još trebamo dokazati da jednakost nastupa ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Prepostavimo li da je $x_1 = \cdots = x_n$, tada je jednakost očigledno zadovoljena i imamo da vrijedi

$$A_n(x) = K_n(x).$$

Pogledajmo obrat. Pretpostavimo li da su bar dva od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ različiti, na primjer, neka je $x_1 \neq x_2$, tada je

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2} + x_3 + \cdots + x_n}{n} \\ &\leq \sqrt{\frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{(x_1+x_2)^2}{2} + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \\ &< \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}}, \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} < x_1^2 + x_2^2, \quad \text{za } x_1 \neq x_2.$$

□

Na kraju imamo da je

$$H_n(x) \leq G_n(x) \leq A_n(x) \leq K_n(x).$$

Teorem 6.4. *Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dana n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq H_n(x).$$

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n. \tag{6.3}$$

Tada je $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1$, pa prema (6.3) dobijamo da je

$$\frac{x_1}{x_2} \leq 1,\ \frac{x_1}{x_3} \leq 1, \ldots, \frac{x_1}{x_n} \leq 1,$$

pa vrijedi

$$\frac{x_1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \cdots + \frac{x_1}{x_n} \leq \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

Sada je

$$x_1 \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leq n,$$

pa podijelimo li posljednju nejednakost izrazom u zagradi, dobijamo

$$x_1 \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = H_n(x),$$

što je i tvrdnja teorema.

□

Teorem 6.5. *Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dana n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$K_n(x) \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Dokaz: Ponovo bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi (6.3). Tada je $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_n$, pa prema (6.3) imamo

$$x_1^2 \leq x_n^2,\ x_2^2 \leq x_n^2, \ldots, x_{n-1}^2 \leq x_n^2.$$

Dobili smo da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq \underbrace{x_n^2 + x_n^2 + \cdots + x_n^2 + x_n^2}_{n} = nx_n^2,$$

odakle, nakon dijeljenja s n i korjenovanja, slijedi

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}{n}} \leq x_n,$$

čime je tvrdnja teorema dokazana.

$\square$

Konačno imamo da vrijedi

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq H_n(x) \leq G_n(x) \leq A_n(x) \leq K_n(x) \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Ako pogledamo specijalan slučaj brojevnih sredina i nejednakosti među njima u slučaju kada je $n = 2$, onda za realne brojeve $0 < x \leq y$ imamo da vrijedi

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2},\ G(x,y) = \sqrt{xy},\ H(x,y) = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}},\ K(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$x \leq H(x,y) \leq G(x,y) \leq A(x,y) \leq K(x,y) \leq y.$$

6.3 Primjena nejednakosti između brojevnih sredina

Vrlo često se prilikom dokazivanja nejednakosti pokušava uočiti sličnost izraza u njima s nekom od brojevnih sredina kako bi se mogla primijeniti jedna od poznatih nejednakost između brojevnih sredina $H \leq G \leq A \leq K$.

Pogledamo li nejednakosti koje su dokazane u Poglavlju 6.1, uočavamo da ih sada možemo mnogo jednostavnije dokazati, jer u prvih 5 primjera imamo direktnu primjenu AG nejednakosti dva, odnosno tri broja.

$$A_2(x^2, y^2) \geq G_2(x^2, y^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$A_2\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \geq G_2\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$A_2\left(a, \frac{1}{a}\right) \geq G_2\left(a, \frac{1}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \quad \Rightarrow \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$A_2(x,y) \geq G_2(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \Rightarrow \quad x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$A_3(a,b,c) \geq G_3(a,b,c) \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \Rightarrow \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Također se uočava da su nejednakosti u primjerima 6.8 i 6.9 upravo GH i AK nejednakosti za brojeve x i y, dok su nejednakosti u primjerima 6.7 i 6.10 nejednakosti između minimuma dva broja i njihove harmonijske sredine, te između maksimuma dva broja i njihove kvadratne sredine. Dokažimo još neke nejednakosti koje vrijede za brojevne sredine ili u čijim se dokazivanjima koriste nejednakosti između brojevnih sredina.

Primjer 6.11. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a i b, takve da je $a+b \geq 1$, vrijedi*

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}.$$

Rješenje: Na osnovu AK nejednakosti za brojeve a^2 i b^2 imamo da vrijedi

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \frac{a^2+b^2}{2},$$

pa nakon kvadriranja dobijamo

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2. \tag{6.4}$$

Sada na osnovu AK nejednakosti za brojeve a i b imamo da vrijedi

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2},$$

pa nakon kvadriranja dobijamo

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

da bismo nakon ponovnog kvadriranja dobili

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4. \tag{6.5}$$

Iz (6.4) i (6.5) dobijamo da je

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4,$$

tj.

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4,$$

a odavde, zbog $a+b \geq 1$ dobijamo da vrijedi

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8},$$

što je i trebalo dokazati.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=\frac{1}{2}$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.12. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Rješenje: Na osnovu AG nejednakosti imamo

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ac},$$

pa ako izmnožimo te nejednakosti dobijamo da je

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2},$$

tj.

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

što je i trebalo dokazati.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.13. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Rješenje: Iz AH nejednakosti za brojeve $1/(b+c)$, $1/(c+a)$ i $1/(a+b)$ slijedi

$$\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{b+c}}+\frac{1}{\frac{1}{c+a}}+\frac{1}{\frac{1}{a+b}}},$$

pa nakon sređivanja dobijamo

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}. \tag{6.6}$$

Kako vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3,$$

to, zbog (6.6), imamo

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq(a+b+c)\,\frac{9}{2(a+b+c)}-3,$$

tj.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $A=H$, tj. ako i samo ako je $a=b=c$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.14. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi*

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt{2}.$$

Rješenje: Primijenimo li AG nejednakost na brojeve $\sqrt{\frac{a+b}{c}}$, $\sqrt{\frac{b+c}{a}}$ i $\sqrt{\frac{c+a}{b}}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b}}}\\
&= 3\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\\
\{\text{AG na } (a,b),\ (b,c),\ (c,a)\} &\geq 3\cdot\sqrt[6]{\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}}{abc}}\\
&= 3\cdot\sqrt[6]{\frac{2^3abc}{abc}}\\
&= 3\sqrt{2},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.15. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi*

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 4\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Rješenje: Primijenimo li AH nejednakost na brojeve a/b i a/c imamo

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\frac{a}{c}}},$$

pa nakon množenja s 2 dobijamo

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\geq\frac{4}{\frac{1}{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\frac{a}{c}}}=\frac{4a}{b+c}.$$

Analogno imamo

$$\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\geq\frac{4b}{c+a}\qquad\text{i}\qquad\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq\frac{4c}{a+b},$$

pa nakon sabiranja ove tri nejednakosti dobijamo traženu nejednakost.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

$\diamondsuit$

Primjer 6.16. *Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

Rješenje: Ako pogledamo GH nejednakost za brojeve x i y onda imamo da vrijedi

$$\sqrt{xy}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Ako stavimo da je $x=a/(b+c)$ i $y=1$, onda dobijamo

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}\geq\frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{b+c}}+\frac{1}{1}},$$

pa nakon sređivanja imamo

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}.$$

Analogno dobijamo

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq\frac{2b}{a+b+c}\qquad\text{i}\qquad\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c}{a+b+c}.$$

Saberemo li ove tri nejednakosti dobijamo

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2. \tag{6.7}$$

Sada nam još preostaje za pokazati da ne postoje pozitivni realni brojevi a, b i c za koje se u (6.7) postiže jednakost, nego da je jedino moguća stroga nejednakost.

Jednakost u (6.7) bi bila moguća jedino u slučaju kada je

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=1,$$

tj. kada je $a=b+c$, $b=c+a$ i $c=a+b$. Saberemo li te tri jednakosti dobijamo da je $a+b+c=0$, što je nemoguće jer je $a, b, c>0$. Zaključujemo da u (6.7) vrijedi stroga nejednakost, pa je tražena nejednakost dokazana.

$\diamondsuit$

Primjer 6.17. *Neka su A, G, H i K brojevne sredine pozitivnih realnih brojev a i b. Dokazati da tada vrijedi*

$$A + G \leq K + H.$$

Rješenje: Pogledamo li danu nejednakost u obliku

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

vidimo da se jednakost postiže za $a = b$. Zato pretpostavimo da je $a \neq b$.

$$\begin{aligned}
& \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a+b}{2} - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} \leq \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)} \qquad \Big| \cdot \frac{2}{(a-b)^2} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \\
\Leftrightarrow \quad & a + b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \qquad \Big|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 + 2ab + b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2} + 2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + ab \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a^2+b^2}{2} - 2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + ab \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Dobili smo očigledno tačnu nejednakost, pa zaključujemo da je i polazna nejednakost, koja je ekvivalentna dobijenoj, također tačna. $\diamondsuit$

Primjer 6.18. *Neka su A, G, H i K brojevne sredine pozitivnih realnih brojev a i b. Dokazati da tada vrijedi*

$$H \cdot K \leq A \cdot G.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} \quad \Big| \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq (a+b) \cdot \sqrt{ab} \quad \Big| \cdot (a+b) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4ab \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq (a+b)^2 \cdot \sqrt{ab} \quad \Big|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 16a^2b^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq (a+b)^4 \cdot ab \\
\Leftrightarrow\quad & 8a^2b^2(a^2+b^2) \leq (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4) \cdot ab \quad \Big| : ab > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 8ab(a^2+b^2) \leq (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4) \\
\Leftrightarrow\quad & a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (a-b)^4 \geq 0
\end{aligned}$$

Dobili smo očigledno tačnu nejednakost, pa zaključujemo da je i polazna nejednakost, koja je ekvivalentna dobijenoj, također tačna. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

$\diamondsuit$

Poglavlje 7

Aritmetički i geometrijski nizovi

7.1 Pojam niza

Nabrajanje (navođenje) brojeva kao što je $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ili $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$ se obično naziva nizom brojeva. Brojevi koji se nalaze u nizu se nazivaju njegovim članovima. Često se susrećemo sa zadacima u kojima se od nas traži da nastavimo započeti niz brojeva.

1° $2, 4, 6, \ldots$

2° $1, 2, 4, \ldots$

3° $1, 4, 9, \ldots$

U takvim zadacima se od nas očekuje da na osnovu zadanih brojeva (članova) uočimo neko pravilo i na osnovu toga napišemo još brojeva (članova). Pogledamo li dane primjere, vidimo da u prvom primjeru niz možemo nastaviti brojevima $8, 10, 12, 14, \ldots$ formirajući niz parnih brojeva. U drugom primjeru možemo reći da krenuvši od broja 1 svaki sljedeći broj dobijamo množeći prethodni broj s 2, pa bismo niz mogli nastaviti brojevima $8, 16, 32, 64, \ldots$, dok u trećem možemo pretpostaviti da su nam zadani kvadrati prirodnih brojeva, te bismo niz mogli nastaviti brojevima $16, 25, 36, \ldots$. U pravilu je svaki niz povezan s nizom prirodnih brojeva, na način da prirodnim brojevima označavamo mjesto broja u nizu. Tako na primjer u trećem primjeru imamo da je broju 1 pridružen broj 1 kao 1. član, broju 2 je kao 2. član u nizu pridružen broj 4, broju 3 je kao 3. članu u nizu pridružen broj 9. Ovo nas dovodi do jedne osobine niza, a to je da je prirodnim brojem određeno mjesto člana u nizu (prvi, drugi, treći član, itd.). U našem primjeru niza kvadrata prirodnih brojeva imamo pridruživanje

$$1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 9,\ 4 \mapsto 16,\ 5 \mapsto 25,\ n \mapsto n^2.$$

Također uočavamo još jednu osobinu nizova, a to je da za neki broj možemo ustanoviti da li je on član niza ili ne. Tako znamo da je broj 100 član posmatranog niza, jer je $100 = 10^2$, te znamo da je on 10. član. Broj 55 nije član posmatranog niza, jer 55 nije kvadrat nijednog prirodnog broja.

Kako iza svakog člana u nizu možemo dopisati još jedan član, to vidimo da niz ima beskonačno članova. Treba napomenuti da se ponekad, iz praktičnih razloga, posmatra niz koji ima konačno mnogo članova, ali se to tada posebno naglašava.

Iako navedeno opisivanje niza nije daleko od smisla ispravne definicije niza, treba naglasiti da ono nije potpuno korektno s matematičkog stajališta, jer za navedene primjere postoji još mnogo drugih rješenja. Tako smo u drugom primjeru niz mogli nastaviti i brojevima $7, 11, 16, \ldots$, ukoliko pretpostavimo da se niz formira tako da se krene od broja 1, te da se svaki sljedeći član dobija tako da se prethodnom članu redom dodaju brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Tako bismo imali 1, $1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 + 3 = 7$, $7 + 4 = 11$, $11 + 5 = 16$, itd. Niz s matematičkog stajališta ima svoju strogu definiciju.

Definicija 7.1. *Neka je zadan neprazan skup S. Svaka funkcija*

$$a\colon \mathbb{N} \to S,$$

koja svakom prirodnom broju n pridružuje tačno jedan element $a_n = a(n)$ iz skupa S se naziva ***niz*** *u skupu S. Element a_n se naziva* ***opći*** *ili* ***n–ti član*** *niza. Niz označavamo simbolom (a_n).*

Specijalno, ako je $S = \mathbb{R}$, tj. ako je $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onda je riječ o nizu realnih brojeva, a ako je $S = \mathbb{C}$ ($a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$), onda je riječ o nizu kompleksnih brojeva.

Treba napomenuti da se ponekad za domenu uzima i skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$, tj. da niz počinje "nultim" članom a_0.

Za niz (a_n) realnih brojeva kažemo da je **ograničen** (**omeđen**) ako postoji realan broj M takav da je $|a_n| \leq M$, za svaki prirodan broj n, tj. ako su svi članovi niza po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednaki M. Tako imamo da je niz $a_n = 1/n$ ograničen, jer mu se svi članovi nalaze između 0 i 1. Isto tako imamo da je niz $a_n = -3 + 2/n$ također ograničen, jer mu se svi članovi nalaze između -3 i -1. Niz prirodnih brojeva nije ograničen, jer je ograničen samo odozdo, ali ne i odozgo.

Za niz (a_n) realnih brojeva kažemo da je: **rastući** ako je $a_n \leq a_{n+1}$, **strogo rastući** ako je $a_n < a_{n+1}$, **padajući** ako je $a_n \geq a_{n+1}$ i **strogo padajući** ako je $a_n > a_{n+1}$. Ako niz (a_n) raste (strogo raste), onda njemu suprotan niz $(-a_n)$ opada (strogo opada), i obratno, ako niz (a_n) opada (strogo opada), onda njemu suprotan niz $(-a_n)$ raste (strogo raste). Niz realnih brojeva kojem su svi članovi jednaki, tj. niz (a_n) gdje je $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se naziva **konstantan niz**.

Za niz kažemo da je **određen** (**zadan, poznat**) ako mu je zadan opći član. Niz, tj. njegov opći član, možemo zadati formulom ili rekurzivnom relacijom, ali i grafički, te opisno.

Primjer 7.1. *Odrediti prvih* 5 *članova niza ako je opći član zadan formulom.*

a) $a_n = 3n$

b) $a_n = 5n - 13$

c) $x_n = 2^n + 1$

d) $b_n = -\frac{1}{n}$

e) $y_n = \frac{3n+1}{n+1}$

Rješenje:

a)

$$a_1 = 3 \cdot 1 = 3 \qquad a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \qquad a_3 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$a_4 = 3 \cdot 4 = 12 \qquad a_5 = 3 \cdot 5 = 15$$

b)

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 13 = -8 \qquad a_2 = 5 \cdot 2 - 13 = -3 \qquad a_3 = 5 \cdot 3 - 13 = 2$$

$$a_4 = 5 \cdot 4 - 13 = 7 \qquad a_5 = 5 \cdot 5 - 13 = 12$$

c)

$$x_1 = 2^1 + 1 = 3 \qquad x_2 = 2^2 + 1 = 5 \qquad x_3 = 2^3 + 1 = 9$$

$$x_4 = 2^4 + 1 = 17 \qquad x_5 = 2^5 + 1 = 33$$

d)

$$b_1 = -\frac{1}{1} = -1 \qquad b_2 = -\frac{1}{2} \qquad b_3 = -\frac{1}{3} \qquad b_4 = -\frac{1}{4} \qquad b_5 = -\frac{1}{5}$$

e)

$$y_1 = \frac{3 \cdot 1 + 1}{1 + 1} = 2 \qquad y_2 = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3} \qquad y_3 = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 + 1} = \frac{5}{2}$$

$$y_4 = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4 + 1} = \frac{13}{5} \qquad y_5 = \frac{3 \cdot 5 + 1}{5 + 1} = \frac{8}{3}$$

$\diamondsuit$

Ako pogledamo niz (a_n) koji je zadan formulom za opći član

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

onda dobijamo

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \\
a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25, \\
a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,370370370, \\
a_4 &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,441406250, \\
a_5 &= \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2,488320000,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2,593742460,\\
a_{100} &= \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704813829,\\
a_{10^6} &= \left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6} = 2,718280469,\\
a_{10^9} &= \left(1+\frac{1}{10^9}\right)^{10^9} = 2,718281827.
\end{aligned}$$

Vidimo da je niz strogo rastući i da se asimptotski približava broju e.

Zadavanje niza rekurzivnom relacijom je zadavanje općeg člana pomoću nekoliko već prije definiranih. U tom slučaju nam mora biti poznato, u zavisnosti od oblika rekurzivne relacije, nekoliko prvih članova niza na osnovu kojih bismo računali naredni član.

Primjer 7.2. *Odrediti još* 3 *člana niza ako je opći član zadan rekurzivnom relacijom.*

a) $a_1 = 3,\ a_n = n \cdot a_{n-1} - 10,\ n \geq 2$

b) $c_1 = -1,\ c_n = 2c_{n-1} + 5,\ n > 1$

c) $a_1 = 7,\ a_2 = 0,\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 1,\ n \geq 3$

d) $w_1 = 1,\ w_2 = 1,\ w_n = (-1)^{n+1}(w_{n-1} - 3) + 2w_{n-2},\ n \geq 3$

e) $b_1 = 1,\ b_2 = 10,\ b_3 = 5,\ b_n = \frac{b_{n-1}+2b_{n-3}}{b_{n-2}},\ n \geq 4$

Rješenje:

a)

$$a_2 = 2 \cdot 3 - 10 = -4 \qquad a_3 = 3 \cdot (-4) - 10 = -22$$

$$a_4 = 4 \cdot (-22) - 10 = -98$$

b)

$$c_2 = 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \qquad c_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11 \qquad c_4 = 2 \cdot 11 + 5 = 27$$

c)

$$a_3 = 2 \cdot 0 + 7 - 1 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 6 + 0 - 1 = 11 \qquad a_5 = 2 \cdot 11 + 6 - 1 = 27$$

d)

$$w_3 = (-1)^{3+1}(1-3) + 2\cdot 1 = 0 \qquad w_4 = (-1)^{4+1}(0-3) + 2\cdot 1 = 5$$

$$w_3 = (-1)^{5+1}(5-3) + 2\cdot 0 = 2$$

e)

$$b_4 = \frac{5+2\cdot 1}{10} = \frac{7}{10} \qquad b_5 = \frac{\frac{7}{10}+2\cdot 10}{5} = \frac{207}{50}$$

$$b_6 = \frac{\frac{207}{50}+2\cdot 5}{\frac{7}{10}} = \frac{101}{5}$$

♢

Primjer jednog od najpoznatijih nizova je tzv. Fibonaccijev niz, koji je zadan rekurzivnom relacijom

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3.$$

Odredimo li mu nekoliko sljedećih članova, dobijamo

$$F_3 = 1+1 = 2, \quad F_4 = 2+1 = 3, \quad F_5 = 3+2 = 5, \quad F_6 = 5+3 = 8.$$

7.2 Aritmetički niz

Definicija 7.2. *Niz je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i člana ispred njega konstantna i iznosi d, tj. ako je*

$$a_n - a_{n-1} = d,\ n \geq 2.$$

*Broj d se naziva **razlika** ili **diferencija aritmetičkog niza**.*

Ako je $d = 0$ onda je aritmetički niz konstantan.
Iz definicije slijedi da je

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2,$$

pa vidimo da svaki sljedeći član aritmetičkog niza dobijemo tako da prethodnom članu dodamo razliku d. Tako imamo da je

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d, \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d,
\end{aligned}$$

pa nastavimo li tako dalje dobijamo da je aritmetički niz s prvim članom a_1 i razlikom d određen općim članom koji je oblika

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Naziv aritmetički niz dolazi od činjenice da je svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) aritmetička sredina člana ispred i člana iza njega, tj. vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 2.$$

Napomenimo da slična relacija vrijedi i za "simetrične" članove niza, tj. za članove koji su jednako udaljeni od a_n, od kojih je jedan ispred a drugi iza njega. Tako imamo da vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n-r} + a_{n+r}}{2}, \quad n \geq 2, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ako sa S_n označimo **sumu prvih** n **članova** aritmetičkog niza, onda vrijedi

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Ako u prethodnu relaciju uvrstimo formulu za opći član $a_n = a_1 + (n-1)d$, onda dobijamo da je

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Ako između dva broja a i b treba interpolirati (ubaciti) r brojeva, tako da dobijeni niz (u ovom slučaju konačan) bude aritmetički, u kojem je a prvi član, a b posljednji član, onda se razlika računa prema formuli

$$d = \frac{b-a}{r+1}.$$

7.3 Geometrijski niz

Definicija 7.3. *Niz je* ***geometrijski*** *ako je količnik svakog člana (osim prvog) i člana ispred njega konstantan i iznosi q, tj. ako je*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \ n \geq 2.$$

Broj q se naziva ***količnik*** *ili* ***kvocijent geometrijskog niza****.*

Ako je $q = 1$ onda je geometrijski niz konstantan.

Iz definicije slijedi da je

$$a_n = qa_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

pa vidimo da svaki sljedeći član geometrijskog niza dobijemo tako da prethodni član pomnožimo s q. Tako imamo da je

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q, \\
a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) + d = a_1 \cdot q^2, \\
a_4 &= a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3, \\
a_5 &= a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4,
\end{aligned}$$

pa nastavimo li tako dalje dobijamo da je geometrijski niz s prvim članom a_1 i količnikom q određen općim članom koji je oblika

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Naziv geometrijski niz dolazi od činjenice da je svaki član geometrijskog niza (osim prvog) geometrijska sredina člana ispred i člana iza njega, tj. vrijedi

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

Ako sa S_n označimo **sumu prvih n članova** geometrijskog niza, onda vrijedi

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Ako u prethodnu relaciju uvrstimo formulu za $q^n = q \cdot a_n / a_1$, onda dobijamo da je

$$S_n = \frac{qa_n - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 - qa_n}{1 - q}, \quad q \neq 1,$$

a kako je $a_{n+1} = qa_n$, to imamo

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1,$$

U slučaju da je $q = 1$, onda je riječ o konstantnom nizu, koji je istovremeno i aritmetički (s razlikom $d = 0$) i geometrijski i suma prvih n članova tog niza je $S_n = na_1$.

Ako između dva broja $a \neq 0$ i b treba interpolirati (ubaciti) r brojeva, tako da dobijeni niz (u ovom slučaju konačan) bude geometrijski, u kojem je a prvi član, a b posljednji član, onda se količnik računa prema formuli

$$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Bibliografija

[1] B. Apsen: *Repetitorij elementarne matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1977.

[2] Š. Arslanagić: *Nejednakosti između brojnih sredina i njihova primjena*, UMBiH, Sarajevo, 2000.

[3] Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[4] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet, Sarajevo, 2009.

[5] B. Ibrahimpašić: *Uvod u teoriju brojeva*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2014.

[6] B. Ibrahimpašić, S. Ibrahimpašić, D. Kovačević, A. Šehanović: *Pravila djeljivosti*, OML **11/2**(2011), 107–112.

[7] S. Kurepa: *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[8] Z. Kurnik: *Analiza*, Matematika i škola **2**(1999), 54–64.

[9] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika; teorija i zadaci*, PrintCom, Tuzla, 2009.