Karmelita Pjanić-Lipovača

PREGLED MODULARNE TEORIJE TOMITA-TAKESAKI

Naslov
Pregled modularne teorije Tomita-Takesaki

Autor
Dr. Karmelita Pjanić-Lipovača

Izdavač
Pedagoški fakultet Bihać

Za izdavača
Prof.dr. Nijaz Skender

Recenzenti
Emeritus prof.dr. Fikret Vajzović, redovni član ANU BiH
Prof.dr. Mirjana Vuković, dopisni član ANU BiH

DTP i izrada
Autor

Štampa
Elektronska forma

Tiraž
Elektronska forma

Odlukom Senata Univerziteta u Bihaću broj 06-3413/2013 od 04. 07. 2013. godine, knjiga "PREGLED MODULARNE TEORIJE TOMITA-TAKESAKI" autora doc.dr. Karmelite Pjanić-Lipovača, ima status univerzitetskog udžbenika.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

517.983.24(075.8)

PJANIĆ-Lipovača, Karmelita
Pregled modularne teorije Tomita-Takesaki [Elektronski izvor] / Karmelita Pjanić-Lipovača. - Udžbenik za fakultete. - Bihać : Pedagoški fakultet, cop. 2013. - 141 str. : graf. prikazi

Način dostupa (URL): http://pfb.ba/wp-content/uploads/2013/07/pmttt.pdf . - Nasl. sa nas. ekrana. - Izvor opisan dana 17. 07. 2013. - Bibliografija: str. 140-141

ISBN 978-9958-594-15-1
I. Lipovača, Karmelita Pjanić- vidi
Pjanić-Lipovača, Karmelita
COBISS.BH-ID 20584966

Karmelita Pjanić-Lipovača

Pregled modularne teorije Tomita-Takesaki

Bihać, 2013.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Teorija algebri operatora na Hilbertovom prostoru počinje se razvijati 30-ih godina prošlog vijeka. Njene temelje postavili su J. von Neumann i F. J. Murray serijom radova tokom 30-ih i 40-ih godina dvadesetog vijeka.

J. von Neumann je 1929. godine uveo pojam *prstena operatora* koje je kasnije J. Diximier nazvao *von Neumannove algebre*. Pod ovim nazivom danas podrazumjevamo familiju algebri koje posjeduju osobinu da su zatvorene u odnosu na slabu topologiju operatora.

Uniformno zatvorene algebre operatora, tzv. C*-algebre, okarakterizirali su i djelimično analizirali Gelfand i Naimark 1949. godine. Nakon tog perioda ova se teorija ubrzano razvija, naročito njena primjena u oblasti kvantne mehanike . Ono što posebno odlikuje teoriju algebri operatora je da ona povezuje algebru i analizu: rezultati ove teorije su iskazani algebarski, dok su tehnike analitičke.

Algebarsku vezu između von Neumannove algebre $\mathcal{M}$ i njenog komutanta $\mathcal{M}'$ dao je 1967. godine M. Tomita, a zatim je dokazao i teorem o komutaciji tenzorskih proizvoda von Neumannovih algebri. U svrhu proučavanja veze između algebre $\mathcal{M}$ i njenog komutanta $\mathcal{M}'$ u nekoj standardnoj reprezentaciji, Tomita je uveo dva pojma tzv. generalizirane Hilbertove algebre i modularne Hilbertove algebre. Time su postavljeni temelji tzv. *modularne teorije Tomita-Takesaki.* Ova teorija je potom izrasla u jedno od najvažnijih oruđa u teoriji operatorskih algebri i višestruko se primjenjuje u kvantnoj fizici.

Cilj ove knjige je da predstavi kratak pregled modularne teorije Tomita –Takesaki.

U glavi 1. su dati osnovni pojmovi potrebni kako bi se na prirodan način mogle uvesti von Neumanove algebre, a zatim i modularna teorija Tomita-Takesaki. U poglavlju 1.1. opisane su C*-algebre kao autoadjungovane algebre ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru koje su zatvorene u uniformnoj topologiji. Kako su reprezentacije C*-algebre značajne u cjelokupnoj teoriji algebarskih operatora, u poglavlju 1.4. je data konstrukcija reprezentacija C*-algebri i dokazana njihova egzistencija.

Glava 2. je posvećena von Neumannovim algebrama. Najprije je dat pregled različitih operatorskih topologija povezanih sa prostorom $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatora koji su ograničeni na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Pri izučavanju von Neumannovih algebri potrebno je poznavanje osobina različitih topologija. Von Neumannove algebre su opisane kao algebre zatvorene u slaboj topologiji operatora, a zatim su date neke značajne osobine.

Centralni dio knjige je glava 3., posvećena modularnoj teoriji Tomita-Takesaki. Tu je konstruisan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ sa "pozitivnim samodualnim konusom" $\mathcal{P}$ tako da pozitivni elementi u predualu von Neumannove algebre $\mathcal{M}_*$ odgovaraju elementima u $\mathcal{P}$, a da automorfizmi od $\mathcal{M}$ odgovaraju unitarnim elementima u $\mathcal{H}$, u odnosu na koje je konus $\mathcal{P}$ invarijantan. Dalje se sa $\mathrm{J}A\Omega = A^*\Omega$ definiše operator kojugacije J na $\mathcal{H}$. Ispitivanje preslikavanja $A\Omega \mapsto A^*\Omega$ je polazna tačka teorije Tomita-Takesaki. Kako je prethodno rečeno, modularna teorija ima značajne primjene u kvantnoj mehanici, pa je na kraju glave 3. dat osvrt na neke od primjena.

S obzirom na sve veću i važniju ulogu modularne teorije u primjeni, posebno fizici, ova knjiga je namijenjena podjednako studentima postdiplomskog studija matematike (funkcionalna analiza) kao i teorijske fizike, koji se opredijele za rješavanje kompleksnih problema s fizikalnom motivacijom, koji često, pored teorijskog imaju velik značaj za primjenu u oblastima algebarske kvantne teorije polja, kvantne mehanike i kvantne statističke mehanike.

Autor

1.
C*-ALGEBRE

1.1. OSNOVNE DEFINICIJE I STRUKTURE

Teorija C*-algebri je specijalan slučaj teorije Banachovih algebri i istovremeno poopćenje nekih algebri ograničenih operatora koji djeluju na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Konstrukciju C*-algebri počećemo apstraktnim opisima koji odgovaraju općoj analizi Banachovih algebri.

Neka je $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Prostor $\mathcal{A}$ nazivamo algebra ako svakom uređenom paru (A,B) elemenata $A,B\in\mathcal{A}$ možemo pridružiti proizvod AB. Pri tom se podrazumjeva da proizvod ima osobine asocijativnosti i distributivnosti, tj. da vrijedi

(1) $A(BC) = (AB)C$;
(2) $A(B+C) = AB + AC$;
(3) $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B) \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{C})$.

Podprostor $\mathcal{B}$ prostora $\mathcal{A}$ koji je također algebra, u odnosu na operacije u $\mathcal{A}$, naziva se podalgebrom algebre $\mathcal{A}$. Kažemo da je algebra $\mathcal{A}$ komutativna ili abelova ako je proizvod komutativan, tj. ako vrijedi $AB = BA$.

Preslikavanje $A \mapsto A^*$ sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$ zvaćemo involucija ili adjungovana operacija algebre $\mathcal{A}$ ako ima sljedeće osobine:

(1) $A^{**} = A$,
(2) $(AB)^* = B^*A^*$,
(3) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}\, A^* + \overline{\beta}\, B^*$.

Algebra s involucijom naziva se *-algebra. Podskup $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ naziva se hermitskim ili autoadjungovanim ako $A\in\mathcal{B}$ implicira $A^*\in\mathcal{B}$.

Algebru $\mathcal{A}$ nazivamo normirana algebra ako se svakom elementu $A\in\mathcal{A}$ može pridružiti realan broj $\|A\|$ - norma od A, koji zadovoljava sljedeće uslove:

(1) $\|A\| \geq 0$ i $\|A\| = 0$ akko $A=0$,
(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$,
(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
(4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Uslov (3) poznat je kao nejednakost trougla, a uslov (4) kao nejednakost proizvoda.

Norma definiše metričku topologiju na $\mathcal{A}$ (uniformnu topologiju). Okolina nekog elementa $A \in \mathcal{A}$ u ovoj topologiji je data sa

$$U(A;\ \varepsilon) = \{B : B \in \mathcal{A},\ \|B - A\| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Ako je $\mathcal{A}$ potpun prostor u odnosu na uniformnu topologiju nazivamo ga Banachovom algebrom. Potpuna normirana algebra sa involucijom i osobinom $\|A\| = \|A^*\|$ naziva se Banachova *-algebra.

Definicija 1.1. *Banachova algebra* $\mathcal{A}$ *sa osobinom*

$$\|A^* A\| = \|A\|^2, \quad \text{za sve } A \in \mathcal{A}$$

zove se C-algebra.*

Osobina norme koja karakteriše C*-algebru je ostatak strukture Hilbertovog prostora. Ova osobina kombinovana sa nejednakošću proizvoda automatski daje $\|A^*\| = \|A\|$, jer je

$$\|A\|^2 = \|A^* A\| \le \|A^*\| \cdot \|A\|$$

i otuda $\|A\| \le \|A^*\|$. Zamjenom uloge A i A^* dobijamo $\|A\| = \|A^*\|$ za sve $A \in \mathcal{A}$.

Navedimo neke primjere C*-algebri. Napomenimo, da se pod Hilbertovim prostorom podrazumjeva kompleksan Hilbertov prostor.

Primjer 1.2. Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Sa $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ označimo skup svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}$. Pretpostavimo da su suma i proizvod elemenata iz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definisani na uobičajeni način i zadajmo na skupu $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ normu

$$\|A\| = \sup\{\|A\psi\| : \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1\}.$$

Adjungovani operatori Hilbertovog prostora definišu involuciju na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. U odnosu na ove operacije i normu, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ je C*-algebra. Osobinu C*-norme dobijamo na sljedeći način

$$\|A\|^2 = sup\{(A\psi, A\psi)\ ;\ \psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|=1\} = sup\{(\psi, A^*A\psi)\ ;\ \psi\in\mathcal{H},$$

$$\|\psi\|=1\}$$

$$\leq sup\{\|A^*A\psi\|\ ;\ \psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|=1\} = \|A^*A\| \leq \|A^*\|\cdot\|A\| = \|A\|^2.$$

Napomenimo da je svaka autoadjungovana ravnomjerno zatvorena podalgebra $\mathcal{A}$
C*-algebre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ također C*-algebra.

Primjer 1.3. Označimo sa $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ algebru kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Algebra $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ je C*-algebra. Kao prvo, $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ je autoadjungovana podalgebra algebre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, a kao drugo, $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ je ravnomjerno zatvorena jer je ravnomjerna granica skupa kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$ automatski kompaktna.

Primjer 1.4. Neka je X lokalno kompaktan prostor, a $C_0(X)$ skup neprekidnih funkcija nad X koje iščezavaju u beskonačnosti. Pod tim podrazumjevamo da za svaku funkciju $f\in C_0(X)$ i $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K\subseteq X$ takav da je $|f(x)| < \varepsilon$ za sve $x\in X\backslash K$. Definišimo na $C_0(X)$ algebarske operacije sa:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

i involuciju sa

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

Na kraju, uvedimo normu sa

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : x\in X\}.$$

$C_0(X)$ je komutativna C*-algebra.

Zbog

$$\|ff^*\| = sup\{|f(x)|^2 : x\in X\} = \|f\|^2$$

vrijedi identitet norme.

Jedinica $\boldsymbol{I}$ C*-algebre $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$ takav da je $A = \boldsymbol{I}A = A\boldsymbol{I}$, za sve $A \in \mathcal{A}$. Slijedi da je $\boldsymbol{I}^*$ također jedinica.
Međutim, $\mathcal{A}$ može imati najviše jednu jedinicu. U suprotnom, za neku drugu jedinicu $\boldsymbol{I}'$ bi vrijedilo

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I},$$

dakle,

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'.$$

Napomenimo da iz relacija

$$\|\boldsymbol{I}\| = \|\boldsymbol{I}^*\boldsymbol{I}\| = \|\boldsymbol{I}\|^2,$$

$$\|A\| = \|\boldsymbol{I}A\| \leq \|\boldsymbol{I}\| \cdot \|A\|$$

slijedi

$$\|\boldsymbol{I}\| = 0 \text{ ili } \|\boldsymbol{I}\| = 1.$$

Ako je $\|\boldsymbol{I}\| = 0$ tada mora biti $\|A\| = 0$ za sve $A \in \mathcal{A}$, i algebra je identički jednaka nuli. Izostavićemo ovaj trivijalni slučaj i smatrati da je $\|\boldsymbol{I}\| = 1$.

Iako C*-algebra može da ima najviše jedan jedinični element, ona ne mora automatski da posjeduje jedinicu. Na primjer, algebra $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ posjeduje jedinicu ako i samo ako je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan prostor, dok algebra $C_0(X)$ ima jedinicu ako i samo ako je prostor X kompaktan.
Odsustvo jediničnog elementa može zakomplikovati strukturnu analizu algebre $\mathcal{A}$, ali se to može zaobići ulaganjem algebre $\mathcal{A}$ u neku veću algebru $\tilde{\mathcal{A}}$ sa jedinicom.
Konstrukciju algebre $\tilde{\mathcal{A}}$ ćemo ovdje izostaviti. Napomenimo samo da je $\tilde{\mathcal{A}}$ oblika
$\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}\mathbf{I} + \mathcal{A}$.

Navedimo još neke definicije i svojstva koja će nam trebati u daljem izlaganju.
Podprostor $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ naziva se njenim lijevim idealom ako iz $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$ slijedi $AB \in \mathcal{B}$. Slično, $\mathcal{B}$ je desni ideal ako iz $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$ slijedi $BA \in \mathcal{B}$. Ako je $\mathcal{B}$ i lijevi i desni ideal, onda se on naziva dvostranim idealom.

Napomenimo da je svaki ideal automatski algebra. Dalje, ako je $\mathcal{B}$ lijevi (ili desni) ideal algebre $\mathcal{A}$ sa involucijom i ako je $\mathcal{B}$ autoadjungovan skup, onda je $\mathcal{B}$ automatski dvostrani ideal.

Primjer 1.5. Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ C*-algebra svih ograničenih operatora na kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ skup $\mathcal{I}_\Omega$ definisan sa

$$\mathcal{I}_\Omega = \{A : A \in \mathcal{A},\ A\Omega = 0\}$$

je lijevi ideal algebre $\mathcal{A}$.

Primjer 1.6. Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, a $\mathcal{B} = \mathcal{LC}(\mathcal{H})$ algebra kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$. Tada je $\mathcal{B}$ dvostrani ideal algebre $\mathcal{A}$, jer je proizvod ograničenog i kompaktnog operatora uvijek kompaktan operator.

C*-algebru $\mathcal{A}$ nazivamo prostom algebrom ako nema netrivijalnih zatvorenih dvostranih ideala, tj. u slučaju kada su $\{0\}$ i $\mathcal{A}$ njeni jedini zatvoreni dvostrani ideali. Ako algebra $\mathcal{A}$ ima jedinični element tada možemo reći da $\mathcal{A}$ nema ni zatvorenih ni nezatvorenih dvostranih ideala.

Ovo poglavlje završićemo navođenjem definicija najznačajnijih klasa elemenata C*-algebri.

Za element $A \in \mathcal{A}$ reći ćemo da je normalan ako vrijedi

$$AA^* = A^*A,$$

a hermitski ili autoadjungovan ako je

$$A = A^*.$$

Ako C*-algebra $\mathcal{A}$ posjeduje jedinicu $\boldsymbol{I}$, tada ćemo A zvati izometričnim elementom ukoliko je

$$A^*A = \boldsymbol{I},$$

a A ćemo zvati unitaranim ako je

$$A^*A = \boldsymbol{I} = AA^*.$$

Napomenimo da element $A \in \mathcal{A}$ ima jedinstvenu dekompoziciju oblika $A = A_1 + iA_2$, u kojoj su A_1 i A_2 hermitski elementi zadani sa $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$.
Posebnu pažnju posvetićemo takozvanim pozitivnim elementima.

1.2. POZITIVNI ELEMENTI

Klasa pozitivnih elemenata je vjerovatno najznačajnija klasa elemenata C*-algebre. To dolazi od toga što pojam pozitivnosti omogućuje uvođenje relacije poretka između različitih elemenata algebre. U ovom poglavlju uvešćemo pojam pozitivnih elemenata i navesti najvažnije osobine pozitivnih elemenata.

Definicija 1.7. *Za element A neke *-algebre $\mathcal{A}$ kažemo da je pozitivan ako je hermitski i ako je njegov spektar $\sigma(A)$ podskup pozitivne poluprave.*
*Skup svih pozitivnih elemenata *-algebre $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathcal{A}_+$.*

Navešćemo bez dokaza neke od jednostavnijih osobina pozitivnih elemenata.

Teorema 1.8. *Neka je $\mathcal{A}$ C*-algebra. Hermitski element $A \in \mathcal{A}$ je pozitivan ako i samo ako je $A=B^2$, za neki hermitski $B \in \mathcal{A}$. Štaviše, ako je A pozitivan element tada postoji jedinstven pozitivan element B takav da je $A=B^2$. Ovaj element B leži u abelovoj C*-podalgebri algebre $\mathcal{A}$ generisanoj sa A.*

Teorema 1.8. omogućava definisanje kvadratnog korijena pozitivnog elementa A iz C*-algebre $\mathcal{A}$, kao jedinstvenog pozitivnog elementa B iz $\mathcal{A}$, takvog da je $B^2 = A$. Ako je A hermitski onda se njegov modul $|A|$ može definisati kao $|A| = \sqrt{A^2}$.

Teorema 1.9. *Skup $\mathcal{A}_+$ pozitivnih elemenata C*-algebre $\mathcal{A}$ je uniformno zatvoren konveksan konus sa osobinom $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$. Ako je A hermitski element algebre $\mathcal{A}$ i ako definišemo $A_\pm$ sa $A_\pm = \frac{1}{2}(|A| \pm A)$ tada je*

(1) $A_\pm \in A_+$,
(2) $A = A_+ - A_-$,
(3) $A_+ A_- = 0$.

Elementi $A_\pm$ su jedinstveni elementi koji imaju ove osobine.

Sljedeća značajna teorema daje karakterizaciju pozitivnih elemenata.

Teorema 1.10. *Neka je* $\mathcal{A}$ *C*-algebra i* $A \in \mathcal{A}$. *Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) A *je pozitivan;*

(2) $A = B^*B$ *, za neko* $B \in \mathcal{A}$.

Dokaz. (1) ⇒ (2) Ova implikacija je sadržana u Teoremi 1.8.
(2) ⇒ (1) Ortogonalnu dekompoziciju elementa B^*B označimo sa

$$B^*B = C - D.$$

Prema Teoremi 1.9, odavde zaključujemo $C, D \in \mathcal{A}_+$ i $CD = 0 = DC$. Treba dokazati da je $D = 0$.
Najprije konstatujmo da je

$$(BD)^*(BD) = D(C - D)D = -D^3 \in -\mathcal{A}_+.$$

Primjetimo zatim da je

$$BD = S + iT,$$

gdje su S i T hermitski elementi.
Ako iskoristimo činjenicu da je $\mathcal{A}_+$ konveksan konus, možemo izračunati

$$(BD)(BD)^* = -(BD)^*(BD) + 2(S^2 + T^2) \in \mathcal{A}_+ .$$

Imajući u vidu poznate osobine spektra pozitivnog elementa, odavde slijedi

$$\sigma((BD)(BD)^*) \subseteq [0, \|B\|^2\|D\|^2]$$

i

$$\sigma((BD)^*(BD)) \subseteq [0, \|B\|^2\|D\|^2].$$

Već smo vidjeli da $(BD)^*(BD) \in -\mathcal{A}_+$, pa je, prema tome $\sigma(D^3) = \{0\}$.
Formula spektralnog radijusa daje

$$\|D^3\| = 0 = \|D\|^3, \text{ dakle, } D = 0. \ \square$$

Na kraju ovog poglavlja osvrnućemo se na polarnu dekompoziciju operatora na Hilbertovom prostoru. Specijalan slučaj ove dekompozicije može se dobiti na sljedeći način:

Ako je $\mathcal{A}$ C*-algebra, tada je A^*A pozitivan za sve $A \in \mathcal{A}$. Modul elementa $A \in \mathcal{A}$ može se definisati sa $|A| = \sqrt{A^* A}$. Ukoliko je A hermitski element, ova definicija se podudara sa prijašnjom definicijom modula. Dalje, ako algebra $\mathcal{A}$ sadrži jedinicu i ako je A invertibilan element, tada je i proizvod A^*A invertibilan, a njegov inverz je pozitivan. Odavde slijedi da je $|A|$ invertibilan te je

$$|A|^{-1} = \sqrt{(A^* A)^{-1}} .$$

Odavde dobijamo

$$A = U|A|,$$

gdje je $U = A|A|^{-1}$.

Lako se pokazuje da je $U^*U = \boldsymbol{I}$ i $U^{1}=|A|A^{-1}$. Znači, U je unitaran element algebre $\mathcal{A}$, a izraz $A = U\,|A|$ predstavlja polarnu dekompoziciju elementa A.

Općenito, svaki zatvoreni, gusto definisan operator A na Hilbertovom prostoru može se predstaviti kao proizvod parcijalne izometrije V i pozitivnog hermitskog operatora $|A| = \sqrt{A^* A}$, tj.

$$A = V(A^* A)^{\frac{1}{2}} ,$$

što predstavlja opću polarnu dekompoziciju.

Ovo možemo ilustrovati sljedećim primjerom.

Primjer 1.11. Neka $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ označava algebru ograničenih operatora na kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je, prema primjeru 1.2, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ C*-algebra.

Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ i $|A| = (A^* A)^{\frac{1}{2}}$. Definišimo operator V nad svim vektorima oblika $|A|\,\psi$ na sljedeći način

$$V|A|\,\psi = A\,\psi.$$

Ovako definisan operator je linearan jer je $|A|\,\psi = 0$ ekvivalentno sa $0 = \||A|\psi\| = \|A\,\psi\|$ i otuda $A\psi = 0$. Osim toga, V je izometričan operator zbog $\|V|A|\psi\| = \|A\,\psi\| = \||A|\psi\|$. Operator V može se produžiti do parcijalne izometrije ako ga izjednačimo sa nulom na ortogonalnom komplementu skupa $\{|A|\,\psi\ :\ \psi \in \mathcal{H}\}$.

Na taj način dolazimo do polarne dekompozicije operatora A:

$$A = V|A|,$$

koja je je jedinstvena u sljedećem smislu:

Ako je $A = UB$, gdje je $B \geq 0$ i U parcijalna izometrija takva da je $U\varphi = 0$ samo za one φ koji su ortogonalni na rang operatora B, tada je $U = V$ i $B = |A|$.
Zaista, $A^*A = BU^*UB = B^*$, pa je prema tome, B je jednak jedinstvenom kvadratnom korijenu $|A|$ operatora A^*A. No tada je $U|A| = V|A|$ te su i U i V jednaki nuli na ortogonalnom komplementu ranga operatora $|A|$.

1.3. DEKOMPOZICIJA JEDINICE HERMITSKOG OPERATORA

Ako je $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ neki hermitski operator i λ realan broj, onda je i $\lambda \boldsymbol{I} - H$ hermitski operator. Sa E_λ označavamo pozitivan projektor tog operatora. Dakle,

$$(\lambda \boldsymbol{I} - H)x = 0 \Rightarrow E_\lambda x = x \quad (\lambda \in \mathbf{R}) .$$

Ovako definisanu familiju E_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$ ortogonalnih projektora nazivamo dekompozicijom jedinice ili spektralnom familijom operatora H i ona ima niz važnih osobina koje potpuno određuju operator H.

Navedimo neke od osobina spektralne familije.

Ako je $C \in L(X)$ i $CH = HC$, tada je $C(\lambda \boldsymbol{I} - H) = (\lambda \boldsymbol{I} - H)C$, što povlači $CE_\lambda = E_\lambda C$, za svako $\lambda \in \mathbf{R}$. Budući da je $HE_\lambda = E_\lambda H$ za svako $\lambda \in \mathbf{R}$, to je $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$ za svako $\mu \in \mathbf{R}$. Osim toga, $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\mu$ za $\lambda > \mu$. Specijalno je $E_\lambda^2 = E_\lambda$ i $E_\lambda^* = E_\lambda$.

Osim toga vrijedi $(E_\lambda x,x) \geq 0$.

Naime, $(E_\lambda x,x) = (E_\lambda^2 x,x) = (E_\lambda x, E_\lambda^* x) = (E_\lambda x, E_\lambda x) = \|E_\lambda x\|^2 \geq 0$, znači $E_\lambda \geq 0$.

Realna funkcija $(E_\lambda x,x)$ je neopadajuća funkcija argumenta λ, jer, za $\lambda > \mu$, imamo

$$(E_\lambda x,x) - (E_\mu x,x) = ((E_\lambda - E_\mu)x,x).$$

No, lako je vidjeti da je $E_\lambda - E_\mu = (E_\lambda - E_\mu)^2$. Zaista,

$$(E_\lambda - E_\mu)^2 = E_\lambda^2 - E_\lambda E_\mu - E_\mu E_\lambda + E_\mu^2 = E_\lambda - E_\mu - E_\mu + E_\mu = E_\lambda - E_\mu .$$

Dakle,

$$(E_\lambda x,x) - (E_\mu x,x) = ((E_\lambda - E_\mu)x,x) = ((E_\lambda - E_\mu)^2 x,x) = ((E_\lambda - E_\mu)x, (E_\lambda - E_\mu)^* x)$$

$$= ((E_\lambda - E_\mu)x, (E_\lambda - E_\mu)x) = \|(E_\lambda - E_\mu)x\|^2 \geq 0 .$$

Operator H se sada može napisati u obliku Stieltjesovog integrala

$$Hx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x \quad .$$

Oblast definicije operatora H se sastoji od onih (i samo onih) elemenata $x \in \mathcal{H}$ za koje integral $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x$ konvergira. Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x$ možemo posmatrati kao onaj vektor iz $\mathcal{H}$ za koji vrijedi

$$(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda x, y) \quad , \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

pri čemu se na desnoj strani nalazi Stieltjesov integral funkcije $f(\lambda) = \lambda$ u odnosu na kompleksnu funkciju $g(\lambda) \overset{def}{=} (E_\lambda x, y)$.

Ako je H pozitivan operator, tj. $(H\xi, \xi) \geq 0$, za svako ξ iz oblasti definicije operatora H, onda imamo

$$Hx = \int_{0}^{\infty} \lambda dE_\lambda x \quad .$$

Ako je $f(\lambda)$ neka neprekidna funkcija definisana na segmentu $[0,+\infty)$, tada sa $f(H)$ označavamo operator definisan sa

$$f(H)x = \int_{0}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda x \, .$$

Oblast definicije operatora $f(H)$ je skup svih $x \in \mathcal{H}$ za koje integral

$$\int_{0}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$$

konvergira.

Ako je $f(\lambda)$ ograničena funkcija na segmentu $[0,+\infty)$, tj.

$$|f(\lambda)| \leq M \qquad (\forall \lambda \geq 0),$$

tada je operator $f(H)$ ograničen i vrijedi

$$\|f(H)\| \leq M \, .$$

Naime, integral $\int_0^N f(\lambda)dE_\lambda x$, $N>0$, je limes sume

$$\sigma x = \sum_{k=0}^{n-1} f(\mu_k)(E_{\lambda_{k+1}} x - E_{\lambda_k} x)$$

u kojoj je

$$\mu_k \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$$

i

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ \dots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \lambda_n < N.$$

Odavde slijedi

$$\|\sigma x\|^2 = \left\| \sum_k f(\mu_k)(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})x \right\|^2$$

$$= \left(\sum_k f(\mu_k)(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})x, \sum_j f(\mu_j)(E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j})x \right)$$

$$= \left(\sum_{k,j} f(\mu_k)\overline{f(\mu_j)}(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})x, (E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j})x \right)$$

$$= \sum_{k,j} f(\mu_k)\overline{f(\mu_j)}(x, (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})(E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j})x) \ .$$

No, lako se vidi da je

$$(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})(E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}) = 0 \quad \text{ako je} \quad k \neq j$$

i

$$(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})(E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}) = E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k} \quad \text{za} \ k = j \ .$$

Zbog toga posljednja jednakost postaje

$$\|\sigma x\|^2 = \sum_k |f(\mu_k)|^2 (x, (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})x) \ \leq \ \sum_k M^2 (x, (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})x)$$

$$= M^2 \left((E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0})x + (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x + \dots + (E_{\lambda_n} - E_{\lambda_{n-1}})x \right)$$

$$= M^2 \ (x,\ (E_{\lambda_n} - E_{\lambda_0})x) = M^2\,(x,\ E_N x) = \mathrm{M}^2\,(x,\ E_N^{\,2}\,x)$$

$$= M^2 \ (E_N x,\ E_N x) = M^2 \ \|E_N x\|^2 \ \le M^2 \ \|x\|^2 \ ,$$

jer je E_N hermitski projektor, pa je $\|E_N\| = 1$.

Dakle,

$$\|\sigma x\| \ \le \mathrm{M}\|x\| \ .$$

Kako je integral $\int_0^{+\infty} f(\lambda)dE_\lambda x$ limes integrala $\int_0^{N} f(\lambda)dE_\lambda x$, kad $N \to \infty$,

tada je i

$$\left\| \int_0^{+\infty} f(\lambda)dE_\lambda x \right\| \le \mathrm{M}\|x\| \ .$$

Ovim je dokazano da je *f(H)* ograničen operator.

1.4. REPREZENTACIJE C*-ALGEBRE

Reprezentacija neke algebarske strukture omogućuje da se u nekoj konkretnoj realizaciji prepoznaju i lakše prouče neke osnovne osobine te strukture. U ovom poglavlju uvodi se definicija reprezentacije C*-algebre i neki osnovni pojmovi u vezi sa reprezentacijama.

Definicija 1.20. *Reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$ definiše se kao par $(\mathcal{H},\pi)$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, a π *-morfizam sa $\mathcal{A}$ u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Reprezentacija $(\mathcal{H},\pi)$ se naziva vjernom (tačnom ili egzaktnom) ako i samo ako je π*-izomorfizam između $\mathcal{A}$ i $\pi(\mathcal{A})$, tj. ako i samo ako je $\ker\pi = \{0\}$.*

Naravno, vjerne reprezentacije su najvažnije reprezentacije i zato je korisno znati kriterije koje treba da zadovoljava reprezentacija da bi bila vjerna.

Propozicija 1.21. *Neka je $(\mathcal{H},\pi)$ reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$. Ova reprezentacija je vjerna ako i samo ako zadovoljava sljedeće ekvivalentne uslove:*

(1) $\ker\pi = \{0\}$;

(2) $\|\pi(A)\| = \|A\|$, *za sve* $A \in \mathcal{A}$;

(3) $\pi(A) > 0$, *za sve* $A > 0$.

Dokaz. Prema definiciji, reprezentacija $(\mathcal{H},\pi)$ je vjerna ako i samo ako je $\ker\pi = \{0\}$.
Dokažimo implikacije (1)⇒(2)⇒(3)⇒(1).

(1)⇒(2) Kako je $\ker\pi = \{0\}$, možemo definisati morfizam π^{-1} iz ranga preslikavanja π u $\mathcal{A}$ sa $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Primjenom nejednakosti $\|\pi(A)\| \le \|A\|$ redom na π^{-1} i π dobijamo

$$\|A\| = \|\pi^{-1}(\pi(A))\| \le \|\pi(A)\| \le \|A\|.$$

(2)⇒(3) Ako je $A > 0$, onda je $\|A\| > 0$ i otuda $\|\pi(A)\| > 0$ ili $\pi(A) \neq 0$. Kako je svaki morfizam pozitivan, zaključujemo da je $\pi(A) > 0$.

(3)⇒(1) Ako uslov (1) nije zadovoljen, tada postoji neki element $B \in ker\pi$ takav da je $B \neq 0$ i da je $\pi(B^*B) = 0$. Kako je $\|B^*B\| \geq 0$ i $\|B^*B\| = \|B\|^2$ dobijamo $B^*B > 0$. Znači, uslov (3) nije zadovoljen. □

Uvedimo pojam podreprezentacije. Ako je $(\mathcal{H},\pi)$ reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{H}_1$ podprostor prostora $\mathcal{H}$, tada ćemo za $\mathcal{H}_1$ kazati da je *invarijantan ili stabilan* u odnosu na π ako vrijedi

$$\pi(A)\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1 \text{ za sve } A \in \mathcal{A}.$$

Ako je $\mathcal{H}_1$ zatvoren podprostor prostora $\mathcal{H}$ i ako je $P_{\mathcal{H}_1}$ ortogonalna projekcija čiji je rang $\mathcal{H}_1$ onda invarijantnost $\mathcal{H}_1$ u odnosu na π implicira

$$P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(A)\,P_{\mathcal{H}_1} = \pi(A)\,P_{\mathcal{H}_1}, \text{ za svako } A \in \mathcal{A}.$$

Dakle,

$$\pi(A)\,P_{\mathcal{H}_1} = (P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(A^*)\,P_{\mathcal{H}_1})^* = (\pi(A^*)\,P_{\mathcal{H}_1})^* = P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(A)$$

za sve $A \in \mathcal{A}$, tj. projektor $P_{\mathcal{H}_1}$ komutira sa svakom od reprezentacija $\pi(A)$.

Obratno, osobina komutativnosti povlači invarijantnost podprostora $\mathcal{H}_1$ u odnosu na π. Dakle, zaključujemo da je $\mathcal{H}_1$ invarijantan u odnosu na π ako i samo ako je

$$\pi(A)\,P_{\mathcal{H}_1} = P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(A) \quad \text{za sve } A \in \mathcal{A}.$$

Dalje, neka je podprostor $\mathcal{H}_1$ invarijantan u odnosu na π i neka je π_1 *-morfizam definisan sa

$$\pi_1(A) = P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(A)\,P_{\mathcal{H}_1}.$$

Lako se vidi da je $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$ reprezentacija algebre $\mathcal{A}$. Stvarno

$$\pi_1(A)\;\pi_1(B) = (P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(A))\cdot(\pi(B)\,P_{\mathcal{H}_1}) = P_{\mathcal{H}_1}\,\pi(AB)\,P_{\mathcal{H}_1} = \pi_1(AB).$$

Reprezentacija definisana na ovaj način naziva se podreprezentacijom reprezentacije $(\mathcal{H}_1,\pi)$.

Trivijalan tip reprezentacije neke C*-algebre dat je sa $\pi = 0$, tj.

$$\pi(A) = 0 \text{ za sve } A \in \mathcal{A}.$$

Reprezentacija može biti netrivijalna, ali da ipak ima trivijalni dio. Naime, ako je $\mathcal{H}_0$ skup definisan sa

$$\mathcal{H}_0 = \{\psi : \ \psi \in \mathcal{H}, \ \pi(A)\psi = 0 \text{ za sve } A \in \mathcal{A}\},$$

tada je skup $\mathcal{H}_0$ invarijantan u odnosu na π i odgovarajuća podreprezentacija $\pi_0 = P_{\mathcal{H}_0} \pi P_{\mathcal{H}_0}$ je nula.

Za reprezentaciju $(\mathcal{H},\pi)$ kažemo da je nedegenerisana ako je $\mathcal{H}_0 = \{0\}$. Skup $\mathcal{M}$ ograničenih operatora djeluje nedegenerišuće na $\mathcal{H}$ ako je

$$\{\psi : \ A\psi = 0, \text{ za svako } A \in \mathcal{M}\} = \{0\}.$$

Važna klasa nedegenerisanih reprezentacija je klasa cikličkih reprezentacija. Najprije uvodimo pojam cikličkog vektora.
Za vektor Ω na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ kažemo da je cikličan u odnosu na skup ograničenih operatora $\mathcal{M}$ ako je skup $\{A\Omega : A \in \mathcal{M}\}$ gust u $\mathcal{H}$.

Sada možemo dati definiciju cikličke reprezentacije.

Definicija 1.22. *Ciklička reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$ je trojka $(\mathcal{H},\pi,\Omega)$, gdje je $(\mathcal{H},\pi)$ reprezentacija algebre $\mathcal{A}$, a Ω vektor u $\mathcal{H}$ cikličan u odnosu na π u $\mathcal{H}$.*

Dokažimo sljedeći važan rezultat.

Propozicija 1.23. *Neka je $(\mathcal{H},\pi)$ nedegenerisana reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$. Tada je π direktna suma familije cikličkih reprezentacija.*

Dokaz. Označimo sa $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$ maksimalnu familiju nenultih vektora u $\mathcal{H}$ takvih da je

$$(\pi(A)\Omega_\alpha, \ \pi(B)\Omega_\beta) = 0,$$

za sve $A, B \in \mathcal{A}$ i $\alpha \neq \beta$.
Egzistenciju takve familije možemo potvrditi pomoću Zornove leme. Uzimajući zatvorenje linearnog podprostora $\{\pi(A)\Omega_\alpha, \ A \in \mathcal{A}\}$, dobijamo Hilbertov podprostor koji ćemo označiti sa $\mathcal{H}_\alpha$. Ovaj podprostor je invarijantan, pa možemo uvesti π_α sa:

$$\pi_\alpha(A) = P_{\mathcal{H}_\alpha}\, \pi(A)\, P_{\mathcal{H}_\alpha}\,.$$

Odavde se vidi da je svaka trojka $(\mathcal{H}_\alpha, \pi_\alpha, \Omega_\alpha)$ ciklička reprezentacija algebre $\mathcal{A}$. Zbog maksimalnosti familije $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$ i nedegenerisanosti reprezentacije π, ne postoji nenulti vektor Ω koji bi bio ortogonalan na svaki od podprostora $\mathcal{H}_\alpha$. Dakle,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha \quad \text{i} \quad \pi = \bigoplus_{\alpha\in I} \pi_\alpha\,.$$

Ovim je propozicija dokazana. □

Prethodnom propozicijom se razmatranje općih reprezentacija sužava na razmatranje cikličkih reprezentacija. Ovo je značajno zato što postoji kanonski oblik konstrukcije cikličkih reprezentacija koji ćemo izložiti u nastavku.
U konstrukciji reprezentacija kao i u dokazu egzistencije reprezentacija C*-algebri važnu ulogu imaju pozitivne linearne forme ili funkcionali nad $\mathcal{A}$. Ovdje ćemo dati samo definiciju važne klase funkcionala, ali se nećemo baviti njenim osobinama.

Definicija 1.24. *Za linearan funkcional ω nad *-algebrom $\mathcal{A}$ kažemo da je pozitivan ako je*

$$\omega(A^*A) \geq 0, \quad \text{za sve } A\in\mathcal{A}.$$

Pozitivan linearan funkcional ω nad C-algebrom $\mathcal{A}$ za koji je $\|\omega\| = 1$, nazivamo stanje.*

Pojam stanja usko je vezan uz pojam reprezentacije.
Pretpostavimo da postoji neka reprezentacija $(\mathcal{H},\pi)$ C*-algebre $\mathcal{A}$. Neka je $\Omega\in\mathcal{H}$ bilo koji nenulti vektor. Definišimo ω_Ω sa

$$\omega_\Omega(A) = (\Omega,\ \pi(A)\Omega), \quad \text{za svako } A\in\mathcal{A}.$$

Time smo definisali linearnu funkciju nad $\mathcal{A}$ koja je pozitivna, jer je

$$\omega_\Omega(A^*A) = \|\pi(A)\Omega\|^2 \geq 0\,.$$

Lako se provjerava da je $\|\omega_\Omega\|=1$ kad god je $\|\Omega\|=1$ i π nedegenerisano. U tom slučaju ω_Ω je stanje nad $\mathcal{A}$. Stanja ovog tipa obično se nazivaju vektorska stanja reprezentacije $(\mathcal{H},\pi)$. Vrijedi i obratno, svako stanje je vektorsko stanje za neku nedegenerisanu reprezentaciju. Da bi ovo pokazali moramo, polazeći od stanja ω, konstruisati reprezentaciju $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega)$ algebre $\mathcal{A}$ i vektor $\Omega_\omega\in\mathcal{H}_\omega$ tako da stanje ω bude identično vektorskom stanju ω_{Ω_ω}, tj.

$$\omega(A) = (\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega),\ \text{za svako}\ A\in\mathcal{A}.$$

Ova konstrukcija je zasnovana na jednostavnoj zamisli. Prvo razmotrimo definiciju prostora reprezentacije $\mathcal{H}_\omega$. Algebra $\mathcal{A}$ je Banachov prostor i pomoću stanja ω može se preobraziti u predhilbertov prostor uvođenjem pozitivnog semidefinitnog skalarnog proizvoda

$$<A,B> = \omega(A^*B).$$

Zatim definišimo skup $\mathcal{I}_\omega$ sa

$$\mathcal{I}_\omega = \{A : A\in\mathcal{A},\ \omega(A^*A) = 0\}.$$

Skup $\mathcal{I}_\omega$ je lijevi ideal u $\mathcal{A}$ jer $I\in\mathcal{I}_\omega$ i $A\in\mathcal{A}$ implicira

$$0 \leq \omega((AI)^*AI) \leq \|A\|\ \omega(I^*I) = 0$$

tj. $AI\in\mathcal{I}_\omega$.

Definišimo klase ekvivalencije ψ_A, ψ_B sa:

$$\psi_A = \{\ \hat{A} : \hat{A} = A + I, I\in\mathcal{I}_\omega\ \}.$$

Zapazimo da ove klase ekvivalencije formiraju kompleksan vektorski prostor kada ih snabdijemo sa operacijama naslijeđenim iz $\mathcal{A}$:

$$\psi_A + \psi_B = \psi_{A+B}\,,$$
$$\alpha\psi_A = \psi_{\alpha A}\,.$$

Ovaj prostor je strogo predhilbertov prostor u odnosu na skalarni proizvod

$$(\psi_A,\ \psi_B) = <A,B> = \omega(A^*B)\ .$$

Poznato je da strogo predhilbertov prostor može biti upotpunjen, tj. linearno uložen kao gust podprostor Hilbertovog prostora na način koji čuva skalarni proizvod. Upotpunjenje ovog prostora definišemo kao prostor reprezentacija $\mathcal{H}_\omega$.

Razmotrimo sada definiciju reprezentacija $\pi_\omega(A)$. Odredimo najprije njihovo djelovanje na gust podskup skupa $\mathcal{H}_\omega$ koji čine vektori ψ_B, $B\in\mathcal{A}$, definisan sa:

$$\pi_\omega(A)\,\psi_B = \psi_{AB}\,.$$

Napomenimo da ova relacija ne zavisi od izbora predstavnika klase ψ_B, jer je

$$\pi_\omega(A)\,\psi_{B+I} = \psi_{AB+AI} = \psi_{AB} = \pi_\omega(A)\,\psi_B$$

za $I\in\mathcal{I}_\omega$.

Osim toga, svaki operator $\pi_\omega(A)$ je linearan, jer je

$$\pi_\omega(A)(\lambda\psi_B + \psi_C) = \pi_\omega(A)\,\psi_{\lambda B+C} = \psi_{\lambda AB+AC} = \lambda\psi_{AB} + \psi_{AC} =$$
$$= \lambda\pi_\omega(A)\,\psi_B + \pi_\omega(A)\,\psi_C\,.$$

Konačno,

$$\left\|\pi_\omega(A)\psi_B\right\|^2 = (\psi_{AB},\ \psi_{AB}) = \omega(B^*A^*AB) \le \left\|A\right\|^2\omega(B^*B) = \left\|A\right\|^2\left\|\psi_B\right\|^2\ .$$

Dakle, $\pi_\omega(A)$ ima ograničeno zatvorenje koje ćemo također označavati sa $\pi_\omega(A)$.

Algebarske osobine π_ω mogu se lako provjeriti. Pošto je

$$\pi_\omega(A_1)\ \pi_\omega(A_2)\psi_B = \psi_{A_1A_2B} = \pi_\omega(A_1A_2)\ \psi_B\,,$$

znači,

$$\pi_\omega(A_1)\ \pi_\omega(A_2) = \pi_\omega(A_1A_2)\ .$$

Na ovaj način smo konstruisali reprezentaciju $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega)$.

Ostaje još da odredimo vektor Ω_ω. Ako algebra $\mathcal{A}$ sadrži jedinicu, vektor Ω_ω definišemo sa $\Omega_\omega = \psi_{\boldsymbol{I}}$. Definicija je korektna, jer je

$$(\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega) = (\psi_{\boldsymbol{I}},\ \psi_A) = \omega(A).$$

Napomenimo da je skup $\{\pi_\omega(A)\Omega_\omega : A\in\mathcal{A}\}$ gust skup klasa ekvivalencije $\{\psi_A,\ A\in\mathcal{A}\}$, pa je otuda Ω_ω cikličan vektor za $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega)$.

Ako algebra $\mathcal{A}$ nema jedinicu, mi joj možemo jedinicu pridužiti i ponoviti gornju konstrukciju za $\hat{\mathcal{A}}$.

Ovim smo utvrdili glavni dio naredne teoreme.

Teorema 1.25. *Neka je ω stanje nad C*-algebrom $\mathcal{A}$. Tada postoji ciklička reprezentacija $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ algebre $\mathcal{A}$ takva da je*

$$\omega(A) = (\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$$

za sve $A \in \mathcal{A}$, te je

$$\|\Omega_\omega\|^2 = \|\omega\| = 1.$$

Osim toga reprezentacija je jedinstvena do na unitarnu ekvivalenciju.

Dokaz. U razmatranju koje je prethodilo iskazu teoreme konstruisali smo reprezentaciju i time dokazali njen glavni dio. Ostaje još samo da dokažemo jedinstvenost te reprezentacije.
Neka je $(\mathcal{H}_{\omega'}, \pi_{\omega'}, \Omega_{\omega'})$ druga ciklička reprezentacija takva da je

$$\omega(A) = (\Omega_{\omega'},\ \pi_{\omega'}(A)\Omega_{\omega'})$$

za svako $A \in \mathcal{A}$.
Tada postoji unitarni operator sa $\mathcal{H}_\omega$ na $\mathcal{H}_{\omega'}$ takav da je

$$U^{-1}\pi_{\omega'}(A)U = \pi_\omega(A)$$

za sve $A \in \mathcal{A}$ i

$$U\Omega_\omega = \Omega_{\omega'}\,.$$

Ovo postižemo definišući operator U na sljedeći način

$$U\pi_\omega(A)\Omega_\omega = \pi_{\omega'}(A)\Omega_{\omega'}\,.$$

Primjetimo da je

$$(U\pi_\omega(A)\Omega_\omega,\ U\pi_\omega(B)\Omega_\omega) = (\pi_{\omega'}(A)\Omega_{\omega'},\ \pi_{\omega'}(B)\Omega_{\omega'}) = \omega(A^*B)$$

$$= (\pi_\omega(A)\Omega_\omega,\ \pi_\omega(B)\Omega_\omega)\,.$$

Odavde se vidi da U čuva skalarni proizvod što znači da je U dobro definisan. Lako je zaključiti da je zatvorenje operatora U unitarno i ima željene algebarske osobine.□

Na ovaj način je dat postupak konstrukcije reprezentacija. Preostaje nam da dokažemo i egzistenciju reprezentacije.

Teorema 1.26. *C*-algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna sa zatvorenom u odnosu na normu, autoadjungovanom algebrom ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru.*

Dokaz. Dokaz ćemo izložiti u kratkim crtama.
Za svako stanje ω algebre $\mathcal{A}$ konstruišimo odgovarajuću cikličku reprezentaciju $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, pa zatim formirajmo direktnu sumu cikličkih reprezentacija:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\omega \in E_{\mathcal{A}}} \mathcal{H}_\omega , \qquad \pi = \bigoplus_{\omega \in E_{\mathcal{A}}} \pi_\omega ,$$

gdje $E_{\mathcal{A}}$ označava skup stanja nad $\mathcal{A}$. Dobijenu direktnu sumu označimo sa $(\mathcal{H}, \pi)$.
Poznato je da za svaki operator $A \in \mathcal{A}$ postoji stanje ω_A takvo da je

$$\left\| \pi_{\omega_A}(A) \right\| = \left\| A \right\|.$$

No,

$$\left\| \pi(A) \right\| \geq \left\| \pi_{\omega_A}(A) \right\| = \left\| A \right\|.$$

S druge strane, zbog neprekidnosti preslikavanja π vrijedi

$$\left\| \pi(A) \right\| \leq \left\| A \right\|.$$

Znači, $\left\| \pi(A) \right\| = \left\| A \right\|$, tj. $(\mathcal{H}, \pi)$ je vjerna reprezentacija. □

Posljednji dio ovog poglavlja posvetićemo egzistenciji tzv. ireducibilnih reprezentacija i karakterizaciji ovih reprezentacija pomoću stanja.

Definicija 1.27. *Za skup $\mathcal{M}$ ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ kažemo da je ireducibilan ako su jedini zatvoreni podprostori prostora $\mathcal{H}$, invarijantni u odnosu na djelovanje operatora iz $\mathcal{M}$, trivijalni podprostori $\{0\}$ i $\mathcal{H}$.*
Reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ C-algebre $\mathcal{A}$ naziva se ireducibilnom ako je skup $\pi(\mathcal{A})$ ireducibilan na $\mathcal{H}$.*

Definicija 1.28. *Stanje ω nad nekom C*-algebrom $\mathcal{A}$ naziva se čisto stanje ako su jedini pozitivni linearni funkcionali majorizirani sa ω funkcionali oblika $\lambda\omega$, $0 \leq \lambda \leq 1$.*
Skup čistih stanja označavamo sa $P_{\mathcal{A}}$.

Pojmovi čistog stanja i ireducibilne reprezentacije povazane sa ω su usko povezani što pokazuje naredna teorema.

Teorema 1.29. *Neka je* ω *stanje nad* C^**-algebrom* $\mathcal{A}$ *i* $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ *ciklička reprezentacija povezana sa* ω*. Tada su sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ *je ireducibilna reprezentacija;*

(2) ω *je čisto stanje.*

Pored toga, postoji 1-1 korespodencija

$$\omega_T(A) = (T\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$$

između pozitivnih funkcionala ω_T *nad* $\mathcal{A}$ *majoriziranih sa* ω *i pozitivnih operatora* T *u komutantu* π_ω' *od* π_ω *za koje je* $\|T\| \leq 1$.

Dokaz. (1)⇒(2) Pretpostavimo da uslov (2) nije zadovoljen. Tada postoji pozitivan funkcional ρ koji nije višekratnik stanja ω takav da je

$$\rho(A^*A) \leq \omega(A^*A) \text{ za sve } A \in \mathcal{A}.$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarza dobijamo

$$|\rho(B^*A)|^2 \leq \rho(B^*B) \cdot \rho(A^*A) \leq \omega(B^*B) \cdot \omega(A^*A)$$
$$= \|\pi_\omega(B)\Omega_\omega\|^2 \cdot \|\pi_\omega(A)\Omega_\omega\|^2 .$$

Odavde se vidi da je $\pi_\omega(B)\Omega_\omega \times \pi_\omega(A)\Omega_\omega \mapsto \rho(B^*A)$ ograničen, seskvilinearan funkcional nad $\mathcal{H}_\omega \times \mathcal{H}_\omega$ i da postoji jedinstven ograničen operator T na $\mathcal{H}_\omega$ takav da je

$$(\pi_\omega(B)\Omega_\omega,\ T\pi_\omega(A)\Omega_\omega) = \rho(B^*A).$$

Kako ρ nije višekratnik stanja ω, to ni operator T nije višekratnik jedinice.
Pored toga,

$$0 \leq \rho(A^*A) = (\pi_\omega(A)\Omega_\omega,\ T\pi_\omega(A)\Omega_\omega) \leq \omega(A^*A)$$
$$= (\pi_\omega(A)\Omega_\omega,\ \pi_\omega(A)\Omega_\omega) ,$$

pa je, prema tome, $0 \leq T \leq \boldsymbol{I}$.

No,

$$(\pi_\omega(B)\Omega_\omega,\ T\pi_\omega(C)\pi_\omega(A)\Omega_\omega) = \rho(B^*CA) = \rho((C^*B)^*A)$$
$$= (\pi_\omega(B)\Omega_\omega,\ \pi_\omega(C)T\pi_\omega(A)\Omega_\omega) ,$$

što znači da T komutira sa π_ω, tj. $T \in \pi_\omega'$. Dakle, uslov (1) nije zadovoljen.

(2)⇒(1) Pretpostavimo da uslov (1) nije zadovoljen. Ako $T \in \pi_\omega'$ tada i $T^* \in \pi_\omega'$, pa su $T+T^*$ i $\frac{1}{i}(T - T^*)$ elementi komutatora π_ω'. Prema tome, postoji hermitski element S iz π_ω' koji nije jednak višekratniku jediničnog elementa. Zbog toga postoji spektralni projektor P operatora S takav da je $0 < P < \boldsymbol{I}$ i $P \in \pi_\omega'$.
Posmatrajmo funkcional

$$\rho(A) = (P\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) .$$

Zbog

$$\rho(A^*A) = (P\pi_\omega(A)\Omega_\omega, P\pi_\omega(A)\Omega_\omega) \geq 0 ,$$

ovaj funkcional je pozitivan.
Pored toga,

$$\omega(A^*A) - \rho(A^*A) = (\pi_\omega(A)\Omega_\omega, (\boldsymbol{I}\text{-}P)\pi_\omega(A)\Omega_\omega) \geq 0 ,$$

što znači da ω majorizira ρ. Lako je provjeriti da ρ nije jednak višekratniku stanja ω. Dakle, uslov (2) nije zadovoljen.
Ovim smo dokazali ekvivalenciju uslova (1) i (2) i istovremeno uspostavili korespodenciju opisanu posljednjom tvrdnjom. □

2.
VON NEUMANNOVE ALGEBRE

1. TOPOLOGIJE NA $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Svaka **C*-**algebra može se predstaviti pomoću algebre ograničenih operatora koji djeluju na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Uopće, postoje brojne neekvivalentne reprezentacije. Međutim, u bilo kojoj fiksnoj reprezentaciji, algebra je zatvorena u uniformnoj topologiji operatora. Detaljna analiza strukture reprezentacije zahtjeva proučavanje djelovanja algebre na vektore i podprostore Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$. Pri ovoj analizi prirodno je i interesantno razmatrati sve operatore koji aproksimiraju predstavnike **C***-algebre na svim konačnodimenzionalnim podprostorima. To nas motiviše da upotpunimo algebru operatora u nekoj topologiji koja je slabija od uniformne topologije, ali koja opet ima neku vrstu uniformnosti na konačnodimenzionalnim podprostorima. Postoje različite takve topologije, ali zatvorenje **C***-algebre ne zavisi od izbora pojedine topologije. Algebra dobijena tim zatvorenjem služi kao primjer von Neumannove algebre.

U ovom poglavlju dat je pregled različitih operatorskih topologija povezanih sa prostorom $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Poznavanje osobina različitih topologija potrebno je pri izučavanju von Neumannovih algebri.

Sve topologije koje se razmatraju su lokalno konveksne topologije u odnosu na strukturu vektorskog prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. To znači da svaka od tih topologija ima bazu okolina tačke 0 (a time i svake tačke) koja se sastoji od konveksnih skupova.

U analizi različitih topologija od velike pomoći je opća teorema Hahn-Banacha za realne ili kompleksne vektorske prostore koju navodimo bez dokaza.

Teorema 2.1. ***(Hahn-Banachova teorema)*** *Neka je X realni vektorski prostor i p funkcija s realnim vrijednostima na X za koju vrijedi:*

(1) $p(\omega_1+\omega_2)\leq p(\omega_1)+p(\omega_2)\,, \quad \omega_1,\ \omega_2 \in X,$

(2) $p(\lambda\omega)=\lambda p(\omega)\,, \quad \lambda \geq 0\,,\ \omega\in X\,.$

Neka je, dalje, Y realan podprostor prostora X i f realan linearan funkcional na Y za koji vrijedi

$$f(\omega)\leq p(\omega)\,, \quad \omega\in Y\,.$$

Tada f ima realnu linearnu ekstenziju F na X takvu da je

$$F(\omega) \leq p(\omega), \quad \omega \in X.$$

Navedimo još jednu verziju teoreme Hahn-Banacha koja koristi osobine separabilnosti.

Teorema 2.2. ***(Hahn-Banachova teorema)*** *Neka je K zatvoren konveksan podskup realnog lokalno konveksnog topološkog Hausdorffovog vektorskog prostora. Ako $\omega_0 \notin K$ tada postoji neprekidan afini funkcional f takav da je $f(\omega_0)>1$ i $f(\omega) \leq 1$, za sve $\omega \in K$.*

Ova verzija Hahn-Banachove teoreme može se izvesti iz prethodne verzije na sljedeći način. Fiksirajmo $\omega' \in K$ i definišimo skup L sa

$$L = \{\ \omega; \omega = \omega'' - \omega', \omega'' \in K\ \}.$$

Zatim uvedimo p_L sa

$$p_L(\omega) = \inf\{\lambda; \lambda \geq 0, \lambda^{-1}\omega \in L\}.$$

Provjerimo da vrijedi:

$$p_L(\omega_1 + \omega_2) \leq p_L(\omega_1) + p_L(\omega_2),$$

$$p_L(\lambda\omega) = \lambda\, p_L(\omega) \quad \text{za } \lambda \geq 0,$$

$$p_L(\omega) \leq 1 \text{ ako i samo ako } \omega \in L.$$

Pri tome ćemo koristiti osobine konveksnosti i zatvorenosti skupa L, kao i činjenicu da $0 \in L$. Provjerimo prvu nejednakost. Svakom elementu ω pridružimo skup

$$L_\omega = \{\lambda \geq 0; \lambda^{-1}\omega \in L\}.$$

Pretpostavimo da $\lambda \in L_{\lambda}(\omega)$ i da je $\mu > \lambda$. Iz definicije skupa L slijedi $0 \in L$ i L je konveksan skup, pa je $\mu \in L$. Pretpostavimo da je $p_L(\omega_1) < \mu$ i $p_L(\omega_2) < \lambda$ i stavimo $u = \mu + \lambda$.

Odavde slijedi

$$\mu^{-1}\omega_1 \in L, \quad \lambda^{-1}\omega_2 \in L,$$

$$u^{-1}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{\mu}{u}(\mu^{-1}\omega_1) + \frac{\lambda}{u}(\lambda^{-1}\omega_2).$$

Kako je skup L konveksan i $\frac{\lambda}{u} = 1 - \frac{\mu}{u}$ to $u^{-1}(\omega_1 + \omega_2) \in L$, što znači da je $p_L(\omega_1 + \omega_2) \leq u$, pa otuda slijedi prva nejednakost.
Jednakost $p_L(\lambda\omega) = \lambda\, p_L(\omega)$ je očigledna.

Ako je $p_L(\omega) \leq 1$, onda $1\omega \in L$, tj. $\omega \in L$.
Obratno, ako $\omega \in L$, to $1 \in \{\lambda > 0;\ \lambda^{-1}\omega \in L\}$.
Kako je $p_L(\omega)$ infimum ovog skupa slijedi $p_L(\omega) \leq 1$.
Pored toga, $\omega_0 - \omega' \notin L$ i otuda $p_L(\omega_0 - \omega') > 1$.
Definišimo sada funkcional g na podprostoru $\{\ \lambda(\omega_0 - \omega')\ ;\ \lambda \in \mathrm{R}\ \}$ sa

$$g(\lambda(\omega_0 - \omega')) = \lambda\, p_L(\omega_0 - \omega').$$

Iz Teoreme 2.1 slijedi da g ima neprekidnu linearnu ekstenziju na X takvu da je
$g(\omega) \leq p_L(\omega)$. Funkcija $f(\omega) = g(\omega - \omega')$ ima željene osobine. □

Ovim smo pokazali da druga verzija Hahn-Banachove teoreme slijedi iz prve verzije. Vrijedi i obratno, tj. da iz druge verzije slijedi prva. No, izostavićemo dokaz jer nam nije od značaja u nastavku.

Pređimo na ispitivanje operatorskih topologija na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Jaka i σ-jaka topologija. Jaku topologiju na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ćemo opisati na sljedeći način:
Ako je $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tada ćemo, za po volji odabran $\varepsilon > 0$ i po volji odabrane vektore $\xi_1, \ldots, \xi_n$ posmatrati skup

$$\mathcal{U}(A_0;\xi_1,\ldots,\xi_n) \overset{def}{=} \left\{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \middle|\ \|A\xi_i - A_o\xi_i\| < \varepsilon, i = 1,\ldots,n\right\}.$$

Skupovi ovog oblika čine bazu okolina tačke A_0 u jakoj topologiji.

Kažemo da hiper-niz (mreža) $\{A_\alpha\}$ u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergira ka $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ u jakoj topologiji ako i samo ako za svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$A_\alpha \xi \underset{\alpha}{\rightarrow} A_0 \xi\ .$$

Na sličan način uvodimo σ-jaku topologiju.
Ako je $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ onda za proizvoljan niz $\{\xi_n\}$ elemenata iz $\mathcal{H}$ takvih da je $\sum \|\xi_n\|^2 < +\infty$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$, skupovi

$$\mathcal{U}(A_0;\xi_1,...,\xi_n,...,\varepsilon) = \left\{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \middle| \sum_{n\geq 0} \|A\xi_n - A_0\xi_n\|^2 < \varepsilon \right\}$$

čine bazu σ-jake topologiije na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Možemo reći da hiper-niz operatora iz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ σ-jako teži ka $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ako i samo ako za svaki niz $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ vektora iz $\mathcal{H}$, takvih da $\sum \|\xi_n\|^2 < +\infty$, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_\alpha \xi_n - A_0 \xi_n\|^2 \underset{\alpha}{\to} 0$$

tj.

$$\lim_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \|A_\alpha \xi_n - A_0 \xi_n\|^2 = 0 .$$

Propozicija 2.3. *Jaka topologija je slabija od σ-jake topologije, ali se ove topologije podudaraju na jediničnoj kugli $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$. Jedinična kugla je potpuna u odnosu na ove topologije.*

Dokaz. Pokažimo da je jaka topologija slabija od σ-jake topologije. Ako $A_\alpha \underset{\alpha}{\to} A_0$ u σ-jakoj topologiji, tj. ako $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_\alpha \xi_n - A_0 \xi_n\|^2 \underset{\alpha}{\to} 0$ (kada je $\sum \|\xi_n\|^2 < +\infty$), tada $A_\alpha \underset{\alpha}{\to} A_0$ i u jakoj topologiji, jer tada, za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, vrijedi

$$\|A_\alpha \xi - A_0 \xi\| \underset{\alpha}{\to} 0 .$$

Posmatrajmo sada jediničnu kuglu $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$. Pretpostavimo da hiper-niz $\{A_\alpha\}$, $A_\alpha \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ jako konvergira ka A_0, tj. da $\|A_\alpha \xi - A_0 \xi\| \underset{\alpha}{\to} 0$. Dokažimo da ovaj hiper-niz konvergira ka A_0 i σ-jako. Uzmimo po volji niz $\{\xi_n\}$ vektora iz $\mathcal{H}$ takav da je $\sum \|\xi_n\|^2 < +\infty$. Za proizvoljno odabran $\varepsilon > 0$, može se naći $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takav da je

$$\sum_{n \geq n_o + 1} \|\xi_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{8} \quad . \tag{*}$$

Tada imamo

$$\sum_{n\geq 1}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 = \sum_{n\leq n_0}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 + \sum_{n>n_0}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2$$

$$\leq \sum_{n\leq n_0}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 + \sum_{n>n_0}\left(\left\|A_\alpha\right\|\cdot\left\|\xi_n\right\| + \left\|A_0\right\|\cdot\left\|\xi_n\right\|\right)^2 .$$

Kako $A_\alpha, A_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ to je $\left\|A_\alpha\right\|, \left\|A_0\right\| \leq 1$ i dobijamo

$$\sum_{n\geq 1}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 \leq \sum_{n\leq n_0}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 + \sum_{n>n_0}\left\|2\xi_n\right\|^2$$

$$= \sum_{n\leq n_0}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 + 4\sum_{n>n_0}\left\|\xi_n\right\|^2 \overset{(*)}{<}$$

$$< \sum_{n\leq n_0}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dalje, zbog jake konvergencije A_α ka A_0, vrijedi

$$\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 \xrightarrow[\alpha]{} 0 , \qquad n = 1,2,\ldots,n_0.$$

Zbog toga možemo naći α_0 takav da, za sve $\alpha \geq \alpha_0$, vrijedi

$$\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 < \frac{\varepsilon}{2n_0} , \qquad \forall n = 1,2,\ldots,n_0.$$

Koristeći ovu procjenu dobijamo

$$\sum_{n\geq 1}\left\|A_\alpha\xi_n - A_0\xi_n\right\|^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon , \quad (\forall \alpha \geq \alpha_0).$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ i proizvoljnosti niza $\xi_1, \xi_2, \ldots$, $\sum\left\|\xi_n\right\|^2 < +\infty$, na osnovu prethodnog zaključujemo da $A_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} A_0$ u σ-jakoj topologiji. Dakle, iz jake konvergencije slijedi σ-jaka konvergencija. Kako smo u prvom dijelu dokaza utvrdili da iz σ-jake konvergencije slijedi jaka konvergencija, zaključujemo da su ove dvije topologije na jediničnoj kugli $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ ekvivalentne.

Potpunost jedinične kugle $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ u odnosu na ove dvije topologije slijedi iz potpunosti prostora $\mathcal{H}$. □

Dokažimo kako se jaka konvergencija niza operatora odnosi prema množenju opreatora. Vrijedi

$$\left(A_n \overset{jako}{\rightarrow} A_0 \wedge B_n \overset{jako}{\rightarrow} B_0 \right) \Rightarrow \left(A_n B_n \overset{jako}{\rightarrow} A_0 B_0 \right).$$

Zaista, za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|A_0 B_0 \xi - A_n B_n \xi\| = \|(A_0 - A_n) B_0 \xi + A_n (B_0 - B_n) \xi\|$$

$$\leq \|(A_0 - A_n)(B_0 \xi)\| + \|A_n\| \cdot \|B_0 \xi - B_n \xi\|.$$

Prvi sabirak na desnoj strani teži nuli jer $A_n \overset{jako}{\rightarrow} A_0$. Dalje, $B_n \xi \rightarrow B_0 \xi$. Znamo da je ograničenost niza $\{A_n\}$ koji jako konvergira ka A_0 posljedica principa uniformne ograničenosti. To znači da postoji broj $M \geq 0$ takav da je

$$\|A_n\| \leq M \qquad (n \in \mathbf{N});$$

dakle,

$$\|A_0 B_0 \xi - A_n B_n \xi\| \rightarrow 0.$$

Ako je Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan, onda je preslikavanje $A \rightarrow A^*$ neprekidno kako u jakoj tako i σ-jakoj topologiji. Međutim, kada je $\mathcal{H}$ beskonačno-dimenzionalan prostor, preslikavanje $A \rightarrow A^*$ nije neprekidno.

Posljednju tvrdnju ćemo ilustrovati sljedećim primjerom.

Neka je $\{\xi_n\}$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}$. Posmatrajmo elemente $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definisane sa

$$A_n \xi = (\xi_n, \xi) \xi_1 .$$

Tada $A_n \rightarrow 0$ u σ-jakoj topologiji, dok je s druge strane

$$(A_n^* \xi_1, \xi) = (\xi_1, A_n \xi) = (\xi_1, \xi_1)(\xi_n, \xi),$$

tj.

$$A_n^* \xi_1 = \xi_n.$$

Znači $A_n^* \xi_1$ ne teži nuli.

Slaba i σ-slaba topologija. Za svaki par vektora $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ definišimo, na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, funkcional $A \rightarrow |(\xi, A\eta)|$. Označimo ovaj funkcional sa $f(A)$. Uzmimo sada proizvoljan $\varepsilon > 0$ i konačno mnogo funkcionala $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ i za $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ formirajmo skup

$$\mathcal{U}(A_0; f_1,\dots,f_n; \varepsilon) = \{\ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ \big| \ |f_i(A - A_0)| < \varepsilon; i = 1,\dots,n\ \}.$$

Skup $\mathcal{U}(A_0; f_1,\dots,f_n; \varepsilon)$ zovemo slaba okolina elementa A_0. Familiju svih skupova koje možemo dobiti na opisani način označimo sa $\mathcal{B}$. Familija $\mathcal{B}$, zajedno sa praznim skupom, može biti baza neke topologije u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Naime, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{B}} \mathcal{U}$. Neka su, dalje, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(A_0; f_1,\dots,f_n; \varepsilon_0)$ i $\mathcal{U}_1(A_0; g_1,\dots,g_m; \varepsilon_1)$ dva skupa iz $\mathcal{B}$, a $B_0 \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$. Stavimo

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(B_0; f_1,\dots,f_n, g_1,\dots g_m; \varepsilon) \qquad (\ \mathcal{U}\in\mathcal{B}\ ),$$

gdje je

$$0 < \varepsilon = \min_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \{\ \varepsilon_0 - |f_i(B_0 - A_0)|, \varepsilon_1 - |g_j(B_0 - A_0)|\ \}.$$

Neka je B proizvoljna tačka iz $\mathcal{U}$. Tada je

$$|f_i(B - B_0)| < \varepsilon \qquad (\ i = 1,2,\dots,n\ )$$

$$|g_j(B - B_0)| < \varepsilon \qquad (\ j = 1,2,\dots\ m\ ).$$

Odavde je za $i = 1,2,\dots,n$

$$|f_i(B - A_0)| \le |f_i(B - B_0)| + |f_i(B_0 - A_0)| \ < \varepsilon + |f_i(B_0 - A_0)|$$

$$\le \varepsilon_0 - \ |f_i(B_0 - A_0)| \ + \ |f_i(B_0 - A_0)| \ = \varepsilon_0.$$

Ovo znači da je $B \in \mathcal{U}_0$, pa kako je B proizvoljan element iz $\mathcal{U}$, to je $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$. Na sličan način bi se zaključilo da je $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1$, dakle,

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$$

Ovim smo dokazali da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Topologija u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ određena familijom $\mathcal{B}$ kao bazom naziva se *slaba topologija* prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ili $\mathcal{L}(\mathcal{H})^*$-topologija prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Neka su $\{\xi_n\}$ i $\{\eta_n\}$ dva niza iz $\mathcal{H}$ za koje vrijedi

$$\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty \quad \text{i} \quad \sum_n \|\eta_n\|^2 < +\infty .$$

Tada, za $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, vrijedi

$$\left|\sum_n (\xi_n, A\eta_n)\right| \leq \sum_n \|\xi_n\| \cdot \|A\| \cdot \|\eta_n\| \leq \|A\| \cdot \left[\sum_n \|\xi_n\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{nn} \|\eta_n\|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty .$$

Zbog toga je funkcionalima $A \mapsto \left|\sum_n (\xi_n, A\eta_n)\right|$ inducirana nova topologija na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ koju zovemo *σ-slaba topologija.* Niz $\{A_\alpha\}$ operatora iz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ teži ka $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ u
σ-slaboj topologiji ako i samo ako

$$\left|\sum_n (\xi_n, A_\alpha \eta_n) - \sum_n (\xi_n, A_0 \eta_n)\right| \underset{\alpha}{\to} 0 .$$

Propozicija 2.4. *σ-slaba topologija je finija od slabe topologije, ali se ove topologije podudaraju na jediničnoj sferi $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Jedinična sfera $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ je kompaktna u odnosu na ove topologije. Osim toga, preslikavanja*

$$A \to BA,\ A \to AB \ \ i \ \ A \to A^*$$

su neprekidna u σ-slaboj topologiji.

Dokaz. Prva tvrdnja se dokazuje slično Propoziciji 2.4. na osnovu činjenice da su funkcionali, koji indukuju σ-slabu topologiju, uniformni limesi slabo neprekidnih funkcionala. Tvrdnja o neprekidnosti množenja je očigledna, dok neprekidnost preslikavanja $A \to A^*$ slijedi iz jednakosti

$$|(\xi, A^*\eta)| = |(\eta, A\xi)| .$$

Kompaktnost jedinične sfere $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ slijedi iz Propozicije 2.9. i Alaoglu-Burbakijeve teoreme koje ćemo dokazati u nastavku. □

Napomenimo da množenje operatora nije neprekidno u slaboj topologiji ako je prostor $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan, tj. ne vrijedi implikacija

$$\left(A_n \xrightarrow{slabo} A_0 \wedge B_n \xrightarrow{slabo} B_0 \right) \Rightarrow \left(A_n B_n \xrightarrow{slabo} A_0 B_0 \right).$$

Naime, ako uzmemo da je $\{e_n\}_{n\in N}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}$, a operator $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ zadan sa

$$Se_n = e_{n+1}\ ,$$

tada za adjungovani operator S^*, imamo

$$S^*e_1 = 0\ ;$$

$$S^*e_{n+1} = e_n \quad (\ n\in \boldsymbol{N}\ ).$$

Niz $\{S^n\}_{n\in N}$ konvergira ka 0 slabo, a niz $\{S^{*n}\}_{n\in N}$ konvergira ka 0 jako.

Stavimo $A_n = S^{*n}$, $B_n = S_n$ ($n\in\boldsymbol{N}$). Sada, $SS^* = \boldsymbol{I}$ povlači $A_nB_n = \boldsymbol{I}$. Budući da $A_n \xrightarrow{jako} 0$, $B_n \xrightarrow{slabo} 0$, $A_nB_n = \boldsymbol{I}$, vidimo da implikacija nije tačna.

Slaba* topologija Banachovog prostora X^*.

Za proizvoljan funkcional $f_0\in X^*$ definišimo okoline od f_0 tako što ćemo za proizvoljno $\varepsilon>0$ i proizvoljan konačan skup elemenata $x_1,\ldots,x_n\in X$ i formirati skupove

$$\mathcal{U}(f_0;\, x_1,\ldots,x_n;\varepsilon) = \left\{\ f\in X^* \middle|\ \left|f(x_i)-f_0(x_i)\right| < \varepsilon; i=1,2,\ldots,n\ \right\}$$

koji predstavljaju okoline tačke f_0.

Ovako dobijeni skupovi zajedno sa praznim skupom čine bazu neke topologije na X^* koju zovemo *slaba* topologija ili X-topologija u prostoru* X^*.

Stavljajući $X = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ i $X^* = \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ dobijamo slabu* topologiju u $\mathcal{L}(\mathcal{H})^*$.

Dokažimo ranije pomenutu teoremu Alaoglu-Burbaki.

Teorema 2.5 *(Alaoglu-Burbaki)*. *Ako je X Banachov prostor, a X^* njegov dualni prostor, tada je jedinična kugla S u X^* kompaktna u X-topologiji prostora X^*.*

Dokaz. Za svako $x\in X$ stavimo

$$C_x = \{\ z\in \mathbb{C}\ \mid\ |z| \leq \|x\|\ \}\ ,$$

gdje je $\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva.

C_x je zatvoren krug kompleksne ravni i, prema tome, kompaktan skup.

Neka je sada

$$Y = \prod_{x \in X} C_x \ ,$$

pri čemu je skup Y snabdjeven produkt topologijom. Kako je Y produkt kompaktnih skupova, Y je kompaktan skup. Elementi prostora Y su funkcije $p = p(x)$ definisane na X i za svako $x \in X$ je $p(x) \in C_x$. Znači, $|p(x)| \leq \|x\|$ za svako $x \in X$. Svakom $f \in S$ pridružimo element $p_f \in Y$ na sljedeći način

$$p_f\,(x) = f(x) \qquad (\ \forall x \in X\ ).$$

Iz $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ zaključujemo da funkcija p_f, definisana posljednjom jednakošću, pripada Y.
Prema tome, definisali smo preslikavanje kugle S u Y. Ovo preslikavanje je obostrano jednoznačno.
Zaista, ako je $f_1 \neq f_2$ ($f_1, f_2 \in S$), tada postoji $x_0 \in X$ takav da je $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$.
Prema tome, $p_{f1}(x_0) = f_1(x_0) \neq f_2(x_0) = p_{f2}(x_0)$, dakle, $p_{f1} \neq p_{f2}$.

Pokažimo da je ovo preslikavanje homeomorfizam kugle S, snabdjevene slabom* topologijom, i njene slike u Y.
Uzmimo po volji $f_0 \in S$ i sliku p_{f0} u Y elementa f_0. Neka je $\mathcal{U}(p_{f0})$ bilo koja okolina, u Y, tačke p_{f0}. Pokažimo da u slaboj* topologiji u S postoji okolina $\mathcal{U}(f_0)$ tačke f_0, koja se, pri gore definisanom preslikavanju preslikava u $\mathcal{U}(p_{f0})$. Možemo smatrati da je $\mathcal{U}(p_{f0})$ okolina iz topološke baze u Y. Tada postoje $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ i $\varepsilon_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) takvi da se $\mathcal{U}(p_{f0})$ sastoji od svih $p \in Y$ za koje je

$$\left| p(x_i) - p_{f_0}(x_i) \right| < \varepsilon_i \qquad (\ i=1,2,\dots n\ ),$$

tj. od svih $p \in Y$ za koje je

$$\left| p(x_i) - f_0(x_i) \right| < \varepsilon_i \qquad (\ i=1,2,\dots n\ ).$$

Uzmimo sada skup $\mathcal{U}(f_0)$ dat sa

$$\mathcal{U}(f_0) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i(f_0)\,,$$

gdje je

$$\mathcal{U}_i(f_0) = \{\ f \in S \mid \left| f(x_i) - f_0(x_i) \right| < \varepsilon_i\ \}.$$

Skup $\mathcal{U}(f_0)$ je kao presjek okolina $\mathcal{U}_i(f_0)$, također okolina tačke f_0 u slaboj* topologiji skupa S.
No, za svako $f \in \mathcal{U}(f_0)$ je

$$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots, n).$$

Odavde dobijamo

$$|p_f(x_i) - p_{f_0}(x_i)| < \varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots, n),$$

što pokazuje da se okolina $\mathcal{U}(f_0)$ tačke f_0 preslikava u $\mathcal{U}(p_{f0})$. Ovim smo dokazali neprekidnost gore definisanog preslikavanja. S obzirom da je to i obostrano jednoznačno preslikavanje Hausdorffovog prostora S u kompaktan prostor Y, ono je i homeomorfizam.

Dokažimo sada da je slika (u Y) skupa S zatvoren skup u Y. Neka $p_0 \in Y$ leži u zatvorenju slike skupa S. Uzmimo proizvoljne $x,y \in X$ i $\lambda \in \mathbf{C}$ i formirajmo okolinu $\mathcal{U}(p_0)$ tačke p_0 datu sa

$$\mathcal{U}(p_0)=\Big\{\ p \in Y \Big|\ |p(x+y) - p_0(x+y)| < \frac{\varepsilon}{3}; |p(x) - p_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$|p(y) - p_0(y)| < \frac{\varepsilon}{3}; |p(\lambda x) - p_0(\lambda x)| < \varepsilon\ \Big\}.$$

Kako p_0 leži u zatvorenju slike skupa S to postoji $f_0 \in S$ takvo da je $p_{f0} \in \mathcal{U}(p_0)$. Odavde imamo

$$|p_{f_0}(x+y) - p_0(x+y)| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,$$

$$|p_{f_0}(x) - p_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,$$

$$|p_{f_0}(y) - p_0(y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|p_{f_0}(\lambda x) - p_0(\lambda x)| < \varepsilon,$$

ili, što je isto

$$|f_0(x+y) - p_0(x+y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_0(x) - p_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_0(y) - p_0(y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_0(\lambda x) - p_0(\lambda x)| < \varepsilon .$$

Na osnovu ovih nejednakosti imamo

$$|p_0(x) + p_0(y) - p_0(x+y)| =$$

$$|\{p_0(x) - f_0(x)\} + \{p_0(y) - f_0(y)\} + f_0(x) + f_0(y) - p_0(x+y)| =$$

$$|\{p_0(x) - f_0(x)\} + \{p_0(y) - f_0(y)\} + \{f_0(x+y) - p_0(x+y)\}| \le$$

$$|f_0(x) - p_0(x)| + |f_0(y) - p_0(y)| + |f_0(x+y) - p_0(x+y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Zbog proizvoljnosti ε odavde imamo

$$p_0(x+y) = p_0(x) + p_0(y).$$

Slično je

$$|\lambda p_0(x) - p_0(\lambda x)| \le |\lambda\{p_0(x) - f_0(x)\}| + |f_0(\lambda x) - p_0(\lambda x)| < |\lambda|\varepsilon + \varepsilon ,$$

pa, zbog proizvoljnosti ε zaključujemo da je

$$p_0(\lambda x) = \lambda\, p_0(x).$$

Dokazali smo da je p_0 linearan funkcional definisan na X. Zbog $|p_0(x)| \le \|x\|$ on je i ograničen i $\|p_0\| \le 1$. Ovo pokazuje da i p_0 pripada slici kugle S. Prema tome, slika kugle S je zatvoren skup u Y i kako je Y kompaktan, to je i slika kugle S kompaktna. S obzirom da je kugla S, snabdjevena slabom* topologijom, homeomorfna sa svojom slikom u Y, zaključujemo da je S kompaktan skup u slaboj* topologiji. □

Definišimo sada pojmove nuklearnog operatora i traga nuklearnog operatora.

Definicija 2.6. *Neka su X i Y separabilni Hilbertovi prostori. Operator $T : X \to Y$ je nuklearan ako postoje prebrojivi sistemi $\{a_n\}$ u X i $\{b_n\}$ u Y takvi da je*

$$Tx = \sum_n (x, a_n) b_n \quad , \qquad x \in X \tag{1}$$

i

$$\sum_n \|a_n\| \|b_n\| < +\infty \tag{2}$$

s tim da red u (1) *jako konvergira.*

Nuklearni operator T može imati više prikaza oblika (1) s tim da vrijedi (2).

Primjetimo da je nuklearni operator $T : X \to Y$ ograničen. Zaista, uzmimo da je nuklearni operator $T : X \to Y$ zadan sa (1) i (2) i stavimo

$$M = \sum_n \|a_n\| \|b_n\| \ .$$

Tada je

$$\sum_n |(x, a_n) b_n| \leq \sum_n \|x\| \cdot \|a_n\| \cdot \|b_n\| \Rightarrow \sum_n |(x, a_n) b_n| \leq M \|x\| \ ,$$

pa se, prema (2) dobija $\|Tx\| \leq M \|x\|$. Dakle, T je ograničen operator. Stavimo

$$\|T\| = \inf \sum_n \|a_n\| \|b_n\| ,$$

pri čemu se infimum uzima po svim rastavima (1) za koje vrijedi (2).

Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.7. *Skup svih nuklearnih operatora sa* X *u* Y *je podprostor od* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Sa* $T \mapsto \|T\|$ *zadana je norma na tom prostoru, koju zovemo nuklearna norma.*

Dokaz. Ako je λ skalar i

$$Tx = \sum_n (x, a_n) b_n \ , \qquad \sum_n \|a_n\| \|b_n\| < +\infty \tag{3}$$

$$T'x = \sum_m (x, c_m) d_m \ , \qquad \sum_m \|c_m\| \|d_m\| < +\infty \ , \tag{4}$$

tada je

$$(\lambda T + T')x = \sum_n (x, a_n)\lambda b_n + \sum_m (x, c_m) d_m \quad ,$$

tj. operator $\lambda T+T'$ je oblika (1). Nadalje,

$$\sum_n \|a_n\| \|\lambda b_n\| + \sum_m \|c_m\| \|d_m\| < +\infty$$

pa je $\lambda T+T'$ i nuklearan operator. Pored toga je

$$\| T + T' \| \leq \sum_n \|a_n\| \|b_n\| + \sum_m \|c_m\| \|d_m\|$$

za sve sisteme $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, za koje vrijedi (3) i sve sisteme $\{c_m\}$, $\{d_m\}$, za koje vrijedi (4). Uzimajući u posljednjoj nejednakosti infimum po svim sistemima $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dobijamo

$$\| T + T' \| \leq \| T \| + \sum_m \|c_m\| \|d_m\| \quad ,$$

pa odavde, kada uzmemo infimum, po sistemima $\{c_m\}$, $\{d_m\}$, proizilazi

$$\| T + T' \| \leq \| T \| + \| T' \| . \qquad \square$$

Prostor nuklearnih operatora nad Hilbertovim prostorom $\mathcal{H}$ označavamo sa $\mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Pokazuje se da vrijedi: ako je $A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ i $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tada je proizvod BA nuklearan operator.

Naime, ako je A nuklearan operator, tada je

$$(BA)(x) = \sum_n (x, a_n) B b_n$$

i

$$\sum_n \|a_n\| \|B b_n\| \leq \|B\| \sum_n \|a_n\| \|b_n\| < +\infty ,$$

odakle slijedi da je BA nuklearan operator.

Iz funkcionalne analize je poznato da za $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ postoje ortonormirani sistemi $\{e_n\}$ i $\{f_n\}$ u $\mathcal{H}$ i pozitivni brojevi s_n takvi da je

$$Tx = \sum s_n (x, e_n) f_n \quad , \qquad (x \in \mathcal{H}) .$$

Prostor $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ je potpun u odnosu na normu $\|\cdot\|$.

Prisjetimo se definicije traga operatora $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kada je $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Ako je $e_1,\dots,e_n$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}$, tada se pomoću formula

$$Te_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

operatoru T pridružuje matrica (t_{ij}). Trag te matrice je

$$t_{11} + t_{22} + \dots + t_{nn} = (Te_1,e_1) + (Te_2,e_2) + \dots + (Te_n,e_n) .$$

Ako su $\{e_1,\dots,e_n\}$ i $\{e_1',\dots,e_n'\}$ dvije ortonormirane baze u $\mathcal{H}$, tada je

$$\sum_{i=1}^{n}(Te_i,e_i) = \sum_{i=1}^{n}(Te_i' ,e_i')$$

i na osnovu te činjenice trag operatora T definišemo formulom

$$TrT = \sum_{i=1}^{n}(Te_i,e_i),$$

gdje je $\{e_1,\dots,e_n\}$ bilo koja ortonormirana baza u $\mathcal{H}$.

U slučaju beskonačnodimenzionalnog prostora i nuklearnog operatora, trag operatora se definiše generalizacijom posljednje formule.

Definicija 2.8. *Ako je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nuklearan operator i $\{e_n\}$ bilo koja ortonormirana baza u $\mathcal{H}$, onda se broj*

$$TrT = \sum_{n}(Te_n,e_n)$$

naziva trag operatora T.

Propozicija 2.9. *Trag $T \mapsto TrT$ je neprekidan linearan funkcional na prostoru nuklearnih operatora ($\mathcal{T}(\mathcal{H})$, $|||\cdot|||$).*

Dokaz. Linearnost funkcionala $T \mapsto TrT$ slijedi iz

$$Tr(A+\lambda B) = \sum\big((A+\lambda B)e_n,e_n\big) = \sum(Ae_n,e_n) + \lambda\sum(Be_n,e_n) = TrA + \lambda TrB ,$$

za $A, B\in\mathcal{T}(\mathcal{H})$ i svaki skalar λ.

Ako je $T\in\mathcal{T}(\mathcal{H})$ dat sa $Tx = \sum s_n(x,e_n)f_n$, tada je

$$|TrT| = |\sum_n (Te_n, e_n)| = |\sum_n s_n (f_n, e_n)| \le \sum_n s_n = \|T\|,$$

što znači da je funkcional $T \mapsto TrT$ neprekidan. □

Sljedećom propozicijom se pokazuje da je prostor $\mathcal{T}(\mathcal{H})^*$, dual prostora $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, izometrički izomorfan sa $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ i da je slaba* topologija na $\mathcal{T}(\mathcal{H})^* = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ isto što i σ-slaba topologija.

Propozicija 2.10. *Neka je Tr trag na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ i neka je $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ Banachov prostor nuklearnih operatora na $\mathcal{H}$ snabdjeven nuklearnom normom. Tada je $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dual $\mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ prostora $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. Slaba* topologija na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ koja proizilazi iz ove dualnosti je u stvari, σ-slaba topologija.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tada je AT nuklearni operator i funkcional $AT \mapsto Tr(AT)$ je neprekidan. Iz nejednakosti

$$|Tr(AT)| \le \|AT\| \le \|A\| \cdot \|T\|$$

slijedi da je $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ podprostor prostora $\mathcal{T}(\mathcal{H})^*$. Obratno, neka je $\omega \in \mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ i posmatrajmo operator $E_{\varphi,\psi}$ ranga jedan definisan za vektore $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ jednakošću

$$E_{\varphi,\psi}\chi = \varphi\,(\psi, \chi)\,.$$

Za operator $E_{\varphi,\psi}$ vrijedi $E_{\varphi,\psi}{}^* = E_{\psi,\varphi}$ i $E_{\varphi,\psi}E_{\psi,\varphi} = \|\psi\|^2 E_{\varphi,\varphi}$.
Dakle,

$$\|E_{\varphi,\psi}\| = \|\psi\| Tr(E_{\varphi,\varphi})^{\frac{1}{2}} = \|\psi\| \cdot \|\varphi\|.$$

Dalje slijedi

$$|\omega(E_{\varphi,\psi})| \le \|\omega\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi\|.$$

Zbog toga, prema Rieszovoj teoremi o reprezentaciji bilinearnog funkcionala, postoji operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, za koji je $\|A\| \le \|\omega\|$, tako da vrijedi

$$\omega(E_{\varphi,\psi}) = (A\varphi, \psi)\,.$$

Posmatrajmo funkcional $\omega_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})^*$, definisan sa $\omega_0(T) = Tr(AT)$. Tada je

$$\omega_0(E_{\varphi,\psi}) = Tr(AE_{\varphi,\psi}) = \sum_k (AE_{\varphi,\psi}e_k, e_k) = \sum_k (A\varphi(\psi, e_k), e_k) =$$

$$= \sum_k (A\varphi, e_k)(\psi, e_k) = (A\varphi, \psi) = \omega(E_{\varphi,\psi}) \ .$$

Sada, za bilo koji $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, postoje ograničeni nizovi $\{\varphi_n\}$ i $\{\psi_n\}$ i niz kompleksnih brojeva $\{s_n\}$ takav da $\sum_n |s_n| < +\infty$ i

$$T = \sum s_n E_{\varphi_n,\psi_n} \ .$$

Posljednji red konvergira u odnosu na nuklearnu normu i otuda je

$$\omega(T) = \sum_n s_n \omega(E_{\varphi_n,\psi_n}) = \sum_n s_n \omega_0(E_{\varphi_n,\psi_n}) = \omega_0(T) = Tr(AT) \ .$$

Znači, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ je dual prostora $\mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Slaba* topologija koja proizilazi iz ove dualnosti inducirana je funkcionalima

$$A \in L(H) \mapsto |Tr(AT)| \ .$$

Za $T = \sum_n s_n E_{\varphi_n,\psi_n}$ dobijamo

$$Tr(AT) = \sum_n s_n Tr(AE_{\varphi_n,\psi_n}) = \sum_n s_n (A\varphi_n, \psi_n) \ .$$

Dakle, pomenutim funkcionalima inducira se σ-slaba topologija. □

Definicija 2.11. *Prostor σ-slabo neprekidnih linearnih funkcionala na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ naziva se predual prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ i označava sa $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$.*

Primjetimo da se $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$ može kanonski identifikovati sa $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ i da je $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_*(\mathcal{H})^*$.

Jaka* i σ-jaka topologija. Ove topologije se definišu pomoću funkcionala (polunormi) oblika

$$A \mapsto \|A\xi\| + \|A^*\xi\|$$

i

$$A \mapsto \Big[\sum_n \|A\xi_n\|^2 + \sum_n \|A^*\xi_n\|^2 \Big]^{\frac{1}{2}}$$

respektivno, gdje je $\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty$.

Osnovna razlika između jake* i jake topologije je u tome da je preslikavanje $A \mapsto A^*$ neprekidno u jakoj* topologiji, ali nije neprekidno u jakoj topologiji.

Sljedeća propozicija dokazuje se na isti način kao u slučaju jake topologije, pa ćemo dokaz izostaviti u ovom slučaju.

Propozicija 2.12. *σ-jaka* topologija finija je od jake* topologije, ali se ove topologije podudaraju na jediničnoj sferi* $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ *prostora* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Množenje* $(A,B) \mapsto AB$ *sa* $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *je neprekidno u ovim topologijama. Ako je* $\mathcal{H}$ *beskonačnodimenzionalan onda množenje sa* $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *nije neprekidno.*

Odnos između pomenutih topologija može se predstaviti na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccccccc} \textit{uniformna} & < & \sigma\textit{-jaka*} & < & \sigma\textit{-jaka} & < & \sigma\textit{-slaba} \\ & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ & & \textit{jaka} & < & \textit{jaka} & < & \textit{slaba} \end{array}$$

Oznaku " < " čitamo "finija od". U slučaju kada je $\mathcal{H}$ beskonačnodimenzionalan prostor, oznaka " < " znači "strogo finija od".

Napomenimo da σ-jaka*, σ-jaka i σ-slaba topologija dopuštaju iste neprekidne linearne funkcionale. Isto vrijedi i za jaku*, jaku i slabu topologiju. S obzirom da je dokaz isti za obje tvrdnje, dokazaćemo samo prvu.

Propozicija 2.13. *Svaki σ-jako* neprekidni linearni funkcional* ω *na* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *je σ-slabo neprekidan, dakle pripada* $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$ *i ima oblik*

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\eta_n),$$

gdje je $\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty$, $\sum_n \|\eta_n\|^2 < +\infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da je ω σ-jako* neprekidan funkcional na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tada postoji niz $\{\xi_n\}$ iz $\mathcal{H}$ takav da je $\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty$ i

$$|\omega(A)| \leq \Big[\sum_{n\geq 1} \left(\|A\xi_n\|^2 + \|A^*\xi_n\|^2 \right) \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Stavimo $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, gdje je $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ za $n = 1,2,\ldots$ i $\mathcal{H}_n = \overline{\mathcal{H}}$ konjugovani Hilbertov prostor prostora $\mathcal{H}$ za $n = -1,-2,\ldots$. Napomenimo da je za $\xi \in \mathcal{H}$, sa ξ označen odgovarajući vektor iz $\mathcal{H}$. Struktura Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ definisana je sa

$$\overline{\xi} + \overline{\eta} = \overline{\xi + \eta} \ ,$$
$$\lambda \overline{\xi} = \overline{\overline{\lambda} \xi} \ ,$$
$$(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = (\eta, \xi) \ .$$

Element prostora $\widetilde{\mathcal{H}}$ ima oblik $\widetilde{\xi} = \{\ldots, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_1, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$.
Za svaki $\widetilde{\eta} = \{ \overline{\eta}_{-m}, \eta_m; m = 1,2,\ldots \} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ i $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definišemo

$$\widetilde{A} \widetilde{\eta} = \{ \overline{A^* \eta_{-m}}, A\eta_m; m = 1,2,\ldots \}.$$

Tada je $\widetilde{A}$ ograničen operator na $\widetilde{\mathcal{H}}$, tj. $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.

Preslikavanje $A \mapsto \widetilde{A}$ je linearno. Iz nejednakosti za ω slijedi da je preslikavanje $\widetilde{A}\widetilde{\xi} \mapsto \omega(A)$ ograničen linearan funkcional na prostoru $\{ \widetilde{A}\widetilde{\xi}; A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \}$. Rieszova teorema o reprezentaciji bilinearnog funkcionala osigurava egzistenciju vektora $\widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ takvog da vrijedi

$$\omega(A) = (\widetilde{\eta}, \widetilde{A}\widetilde{\xi}) = \sum_{n=1} \left[(\eta_n, A\xi_n) + (\xi_{-n}, A\eta_{-n}) \right].$$

Odavde zaključujemo da je ω σ-slabo neprekidan funkcional. □

Prethodne propozicije vode do sljedeće teoreme.

Teorema 2.14. *Neka je K konveksan podskup prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{L}_r(\mathcal{H})$ kugla radijusa r u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne*

(1) *K je σ-slabo zatvoren;*
(2) *K je σ-jako zatvoren;*
(3) *K je σ-jako* zatvoren;*
(4) *$K \cap L_r(H)$ je slabo (otuda σ-slabo) zatvoren za sve $r > 0$;*
(5) *$K \cap L_r(H)$ je jako (otuda σ-jako) zatvoren za sve $r > 0$;*
(6) *$K \cap L_r(H)$ je jako* (otuda σ-jako*) zatvoren za sve $r > 0$.*

Dokaz. Ekvivalencija (1)⇔(4) slijedi iz činjenice da je $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dual prostora $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$ i te Banachove teoreme. Implikacije (4)⇒(5)⇒(6) i (1)⇒(2)⇒(3) su trivijalne.
Kako je $K \cap \mathcal{L}_r(\mathcal{H})$ konveksan za sve r, implikacije (3)⇒(1) i (6)⇒(4) slijede iz Propozicije 2.13. □

Mackeyeva topologija. Neka su X i Y vektorski prostori nad poljem $\mathbf{C}$ i neka je $K \subseteq Y$ $\sigma(Y,X)$-kompaktan konveksan skup. Znamo da se svako $x \in X$ može smatrati $\sigma(Y,X)$-neprekidnim funkcionalom na Y, tj. svaki $x \in X$ se može identifikovati sa funkcionalom g_x na Y, gdje je

$$g_x(y) = B(x,y) \qquad (\forall y \in Y) .$$

Ako funkcional g_x posmatramo na skupu K, onda je to $\sigma(Y,X)$-neprekidna funkcija definisana na $\sigma(Y,X)$-kompaktnom skupu K. Zbog toga je ta funkcija ograničena na K. Postoji, dakle, konačan supremum

$$\sup_{y \in K} |g_x(y)| .$$

Sada, stavimo

$$\|x\|_K = \sup_{y \in K} |g_x(y)| = \sup_{y \in K} |B(x,y)| .$$

Lako se provjerava da je ovim zadana polunorma na X. Mijenjajući K na sve moguće načine, ali tako da K ostane konveksan i $\sigma(Y,X)$-kompaktan, dobijamo familiju polunormi. Tom familijom je određena tzv. Mackeyeva topologija na X koja se označava sa $\tau(X,Y)$. Slično se uvodi i Mackeyeva topologija $\tau(Y,X)$ na Y.

Mackeyeva topologija $\tau(X,Y)$ (odnosno $\tau(Y,X)$) je najjača od svih lokalno konveksnih topologija τ na X (odnosno na Y) za koje vrijedi

$$(X,\tau)^* = Y \qquad (\text{ odnosno } (Y,\tau)^* = X).$$

Prema tome, imamo:

(a) ako je na X (odnosno na Y) zadana $\tau(X,Y)$ (odnosno $\tau(Y,X)$) topologija onda je funkcional $f \in X^*$ (odnosno $g \in Y^*$) $\tau(X,Y)$-neprekidan (odnosno $\tau(X,Y)$-neprekidan) ako postoji $y \in Y$ (odnosno $x \in X$) takav da je

$$f = f_y \qquad (\text{ odnosno } g = g_x),$$

tj. ako i samo ako vrijedi

$$f(x) = f_y(x) = B(x,y) \quad (\forall x \in X)$$
$$(\text{ odnosno } \quad g(y) = g_x(y) = B(x,y) \quad (\forall y \in Y)\ ).$$

Iz definicije $\tau(X,Y)$-topologije na X vidimo da hiperniz $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in X$ konvergira u $\tau(X,Y)$ topologiji ka $x_0 \in X$ ako i samo ako vrijedi

$$\|x_\alpha - x_0\| \xrightarrow{\alpha} 0$$

za svaki konveksan $\sigma(Y,X)$-kompaktan skup $K \subseteq Y$.

Znači, $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x_0$ u odnosu na $\tau(X,Y)$ topologiju, ako i samo ako za svaki konveksan i $\sigma(Y,X)$-kompaktan skup K vrijedi

$$\sup_{y \in K} |g_y(x_\alpha - x_0)| = \sup_{y \in K} |B(x_\alpha - x_0, y)| \xrightarrow{\alpha} 0\ .$$

No, ovo znači da

$$g_y(x_\alpha - x_0) = B(x_\alpha - x_0, y) \xrightarrow{\alpha} 0$$

i to ravnomjerno u odnosu na y na svakom konveksnom $\sigma(Y,X)$-kompaktnom skupu $K \subseteq Y$. Zbog toga se za $\tau(X,Y)$ topologiju na X kaže da je to topologija ravnomjerne konvergencije na svim $\sigma(Y,X)$-kompaktnim konveksnim skupovima iz Y.
Slično vrijedi i za $\tau(Y,X)$ topologiju na Y.

(b) ako uzmemo bilo koju lokalno konveksnu topologiju τ na X koja je jača od $\tau(Y,X)$ topologije, tada postoji bar jedan neprekidan funkcional f na X za kojeg se ne može naći $y \in Y$ za kojeg vrijedi

$$f(x) = f_y(x) = B(x,y) \qquad (\forall x \in X).$$

Tada je

$$(X,\tau)^* \underset{\neq}{\supset} (X,\ \tau(X,Y))^*.$$

Slično se dokazuje i za $\tau(Y,X)$ topologiju na Y.

Na kraju napomenimo sljedeće: pošto $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x_0$ u odnosu na $\sigma(X,Y)$-topologiju na X, ako i samo ako za svako $y \in Y$

$$f_y(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f_y(x_0)\,,$$

tj. za svaku tačku $y \in Y$

$$B(x_\alpha, y) \xrightarrow{\alpha} B(x_0, y)\,,$$

kaže se da je $\sigma(X,Y)$-topologija na X topologija obične konvergencije ili konvergencije po tačkama.

2.2. DEFINICIJA I OSNOVNE OSOBINE VON NEUMANNOVIH ALGEBRI

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Za proizvoljan podskup $\mathcal{M}$ prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sa $\mathcal{M}'$ označimo njegov komutant, tj. skup svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}$ koji komutiraju sa svakim operatorom iz $\mathcal{M}$. Jasno je da je $\mathcal{M}'$ Banachova algebra operatora koja sadrži jedinicu ***I***. Ako je $\mathcal{M}$ autoadjungovan skup onda je $\mathcal{M}'$ **C*-**algebra operatora na $\mathcal{H}$, zatvorena u odnosu na sve lokalno konveksne topologije definisane u prethodnom poglavlju. Jasno je da vrijedi

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'' = \mathcal{M}^{(IV)} = \mathcal{M}^{(VI)} = \dots \ ,$$
$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}''' = \mathcal{M}^{(V)} = \mathcal{M}^{(VII)} = \dots \ .$$

Definicija 2.15. *Von Neumannova algebra na prostoru* $\mathcal{H}$ *je *-podalgebra* $\mathcal{M}$ *prostora* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *takva da je*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}'' .$$

Centar $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ *von Neumannove algebre definiše se sa*

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' .$$

Von Neumannova algebra naziva se faktorskom ako ima trivijalan centar, tj. ako je $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbf{C}\mathbf{I}$.

Ako je podskup S prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ invarijantan u odnosu na operaciju $*$, tada je dvostruki komutator S'' od S, najmanja von Neumannova algebra koja sadrži S i naziva se von Neumannova algebra generisana skupom S.

U nastavku ćemo navesti neke elementarne činjenice u vezi sa von Neumannovim algebrama.

Neka je A hermitski element u von Neumannovoj algebri $\mathcal{M}$. Ako neki operator komutira sa A, on komutira i sa svim spektralnim projekcijama operatora A, pa i njegove spektralne projekcije leže u $\mathcal{M}$. S obzirom da se A može aproksimirati u normi pomoću linearnih kombinacija spektralnih projekcija i da je svaki element iz $\mathcal{M}$ linearna kombinacija dva hermitska operatora, $A = \dfrac{A + A^*}{2} + i\dfrac{A - A^*}{2i}$,
to projekcije u $\mathcal{M}$ razapinju gust u normi podprostor prostora $\mathcal{M}$.

Iz činjenice da svaki element iz C*-algebre sa jedinicom možemo prikazati kao linearnu kombinaciju četiri unitarna elementa, slijedi da element $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ leži u $\mathcal{M}$ ako i samo ako je $VAV^* = A$ za sve unitarne elemente $V \in \mathcal{M}'$.
Otuda, ako je $A = U|A|$ polarna dekompozicija elementa $A \in \mathcal{M}$, tada za bilo koji unitarni element $V \in \mathcal{M}'$ vrijedi

$$VUV^*V|A|V^* = VU|A|V^* = VAV^* = A = U|A|.$$

Odavde i iz jedinstvenosti polarne dekompozicije dobijamo

$$VUV^* = U \ , \quad V|A|V^* = |A|.$$

Dakle, $U \in \mathcal{M}$, $|A| \in \mathcal{M}$.

Slično bi se pokazalo da, u slučaju kada je $\{A_\alpha\}$ rastuća mreža pozitivnih operatora iz $\mathcal{M}$, s najmanjom gornjom granicom $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$, za bilo koji unitarni element $V \in \mathcal{M}'$ i mreža $\{VA_\alpha V^*\} = \{A_\alpha\}$ ima najmanju gornju granicu VAV^*. Dakle, $A = VAV^*$ i $A \in \mathcal{M}$.

Primjetimo da je svaki dvostrani ideal von Neumannove algebre hermitski.

Naime, ako je $\mathcal{M}_1$ dvostrani ideal von Neumannove algebre $\mathcal{M}$ nad Hilbertovim prostorom $\mathcal{H}$ i $A \in \mathcal{M}_1$ za koji je $A = U|A|$ polarna dekompozicija elementa A, tada iz $A = U|A|$ slijedi

$$A^* = (U|A|)^* = |A|^*U^* = |A|U^* \qquad (\text{ jer je } |A| \text{ hermitski }).$$

Prema tome, $A^* = |A|U^* \in \mathcal{M}_1$.

Definicija 2.16. *Ako je* $\mathcal{M}$ *podskup prostora* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*, a* Ω *podskup prostora* $\mathcal{H}$*, onda sa* $[\mathcal{M}\Omega]$ *označavamo zatvorenje linearnog omotača elemenata oblika* $A\xi$*, gdje je* $A \in \mathcal{M}$*,* $\xi \in \Omega$*.* $[\mathcal{M}\Omega]$ *označava također ortogonalnu projekciju na* $[\mathcal{M}\Omega]$*.*

Neku *-podalgebru $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nazivamo nedegenerisanom ako je

$$[\mathcal{A}H] = H.$$

Ako $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sadrži jedinicu $\boldsymbol{I}$, onda je $\mathcal{A}$ automatski nedegenerisana.

Posmatrajmo sada prebrojivu sumu kopija prostora $\mathcal{H}$:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \ , \quad \text{u kojoj je } \mathcal{H} = \mathcal{H}_n \text{ za svako } n.$$

Ako je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ možemo definisati operator $\pi(A)$ na sljedeći način

$$\pi(A)\left(\bigoplus_n \xi_n\right) = \bigoplus_n \left(A\xi_n\right).$$

Preslikavanje $\pi : A \to \pi(A)$ prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ u $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$ je izomorfizam. Preciznije, π je *-izomorfizam prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ u neku podalgebru prostora $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$.

Lema 2.17. *Za bilo koji podskup $\mathcal{A}$ prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vrijedi*

$$\pi(\mathcal{A})'' = \pi(\mathcal{A}'').$$

Dokaz. Neka je E_n ortogonalna projekcija sa $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ na $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$. Jasno je da $B \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$ leži u $\pi(\mathcal{A})'$ ako i samo ako $E_n B E_m \in \mathcal{A}'$ za sve n, m. Otuda, $C \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$ leži u $\pi(\mathcal{A})''$ ako i samo ako C komutira sa svakim E_n i $E_n C E_n$ je fiksan element u $\mathcal{A}''$, tj. ako i samo ako $C \in \pi(\mathcal{A}'')$. □

Lema 2.18. *Ako je $\mathcal{M}$ nedegenerisana *-algebra operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, onda ξ pripada $[\mathcal{M}\xi]$ za svako $\xi \in \mathcal{H}$.*

Dokaz. Neka je $P = [\mathcal{M}\xi]$. Tada je

$$MP = PMP \quad \text{za sve } M \in \mathcal{M}.$$

To znači da je podprostor $[M\xi]$ invarijantan u odnosu na sve $M \in \mathcal{M}$. Konjugovanjem dobijamo

$$PM^* = PM^*P \qquad \text{za sve } M^* \in \mathcal{M}.$$

Kako je $\mathcal{M}$ samoadjungovan skup, zaključujemo da je

$$MP = PM = PMP \quad \text{za sve } M \in \mathcal{M},$$

tj. $P \in \mathcal{M}'$.

Ako stavimo $\xi' = P\xi$ i $\xi'' = (\boldsymbol{I} - P)\xi$, dobićemo $\xi = \xi' + \xi''$.
Kako je $[\mathcal{M}\xi]$ invarijantno u odnosu na *-algebru $\mathcal{M}$ isto vrijedi i za ortogonalni komplement od $[\mathcal{M}\xi]$. Otuda iz relacije

$$A\xi' + A\xi'' = A\xi \in [\mathcal{M}\xi]$$

slijedi $A\xi'' = 0$ za sve $A \in \mathcal{M}$.

Za svaki vektor oblika

$$\eta = \sum_i A_i \xi_i \ , \quad A_i \in \mathcal{M}, \tag{*}$$

vrijedi $(\xi'', \eta) = 0$, jer je

$$(\xi'', \eta) = (\xi'', \sum_i A_i \xi_i) = \sum_i (A\xi'', \xi_i) = \sum_i (0, \xi_i) = 0 .$$

Uzmimo proizvoljan vektor $\eta \in \mathcal{H}$ i niz η_i oblika (*) za koji vrijedi $\eta_i \to \eta$. Tada je

$$(\xi'', \eta) = (\xi'', \lim_i \eta_i) = \lim_i (\xi'', \eta_i) = 0,$$

što znači da mora biti $\xi'' = 0$. Prema tome, $\xi = \xi' \in [\mathcal{M}\xi]$. □

Lema 2.19. *Neka je $\mathcal{M}$ nedegenerisana *-algebra operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{M}''$ i $\varepsilon > 0$ postoji element $B \in \mathcal{M}$ takav da je*

$$\|(A - B)\xi\| < \varepsilon .$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $[\mathcal{M}\xi] = [\mathcal{M}''\xi]$.
Neka je P ortogonalna projekcija na $[\mathcal{M}\xi]$. Tada je, prema prethodnoj lemi, $P \in \mathcal{M}'$, pa P komutira sa svakim operatorom iz $\mathcal{M}''$. Znači $[\mathcal{M}\xi]$ je invarijantan u odnosu na $\mathcal{M}''$. Prema Lemi 2.18. je $\xi \in [\mathcal{M}\xi]$, što povlači $\mathcal{M}''\xi \subseteq [\mathcal{M}\xi]$ i $[\mathcal{M}''\xi] \subseteq [\mathcal{M}\xi]$. □

Sada možemo dokazati teoremu von Neumanna o bikomutanti koja je od velikog značaja u sveukupnoj teoriji algebri operatora.

Teorema 2.20. ***(Teorema o bikomutanti)*** *Neka je $\mathcal{A}$ nedegenerisana *-algebra operatora na $\mathcal{H}$, a $\mathcal{A}_1$ jedinična kugla u $\mathcal{A}$ .Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$;
(2) (*resp.* (2a)) $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{A}_1$*) je slabo zatvorena;*
(3) (*resp.* (3a)) $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{A}_1$*) je jako zatvorena;*

(4) (*resp.* (4a)) $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{A}_1$*) je jako* zatvorena;*
(5) (*resp.* (5a)) $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{A}_1$*) je σ-slabo zatvorena;*
(6) (*resp.* (6a)) $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{A}_1$*) je σ-jako zatvorena;*
(7) (*resp.* (7a)) $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{A}_1$*) je σ-jako* zatvorena.*

Dokaz. Ekvivalencija tvrdnji (2a), (3a), (4a), (5), (5a), (6), (6a), (7), (7a) slijedi iz Teoreme 2.14. Uslov (1) implicira ostale uslove i (2)⇒(3)⇒(4)⇒(7).
Ostaje da se, na primjer, dokaže implikacija (6)⇒(1). U tu svrhu posmatrajmo prebrojivu sumu kopija prostora $\mathcal{H}$: $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, u kojoj je $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$, za svako n.
Za $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definišimo $\pi(A) \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$ sa

$$\pi(A)\left(\bigoplus_n \xi_n\right) = \bigoplus_n \left(A\xi_n\right).$$

Pretpostavimo da vrijedi uslov (6). Neka $A \in \mathcal{A}''$ i neka je $\{\xi_n\}$ niz u $\mathcal{H}$ takav da je $\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty$. Tada $\bigoplus_n \xi_n \in \widetilde{\mathcal{H}}$. S obzirom da je $\mathcal{A}$ nedegenerisana algebra, to je i $\pi(\mathcal{A})$ nedegenerisana. Osim toga, prema Lemi 2.17. je $\pi(A) \in \pi(\mathcal{A})''$. Sada možemo primjeniti Lemu 2.19, u kojoj ćemo A zamijeniti sa $\pi(A)$, $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A})$ i $\xi = \bigoplus_n \xi_n$. Otuda postoji element $B \in \mathcal{A}$ takav da je

$$\varepsilon > \left\|\left(\pi(A) - \pi(B)\right)\xi\right\| = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \|(A-B)\xi_n\|^2 \Big]^{\frac{1}{2}} ,$$

pa A mora pripadati σ-jakom zatvorenju algebre $\mathcal{A}$. Dakle, $A \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}$. □

Korolar 2.21. ***(von Neumannova teorema o gustini)*** *Neka je* $\mathcal{A}$ *nedegenerisana *-algebra operatora koja djeluje na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$*. Tada je* $\mathcal{A}$ *gust u* $\mathcal{A}''$ *u slaboj, jakoj, jakoj*, σ-slaboj, σ-jakoj i σ-jakoj* topologiji.*

Dokaz. Ako je $\overline{\mathcal{A}}$ zatvorenje algebre $\mathcal{A}$ u bilo kojoj od navedenih topologija, tada je $\overline{\mathcal{A}}' = \mathcal{A}'$ i otuda $\overline{\mathcal{A}}'' = \mathcal{A}''$. Osim toga, iz Teoreme 2.20. slijedi $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}''$. □

Dokazaćemo još jednu korisnu teoremu.

Teorema 2.22. ***(Teorema Kaplanskog o gustini)*** *Ako je $\mathcal{A}$ *-algebra operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, onda je jedinična kugla iz $\mathcal{A}$ σ-jako* gusta u jediničnoj kugli slabog zatvorenja od $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ slabo zatvorenje algebre $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{M}_1$ jedinične kugle u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{M}$, respektivno i za podskup $\mathcal{N}$ prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, označimo sa $\mathcal{N}_{sa}$ skup hermitskih (autoadjungovanih) elemenata iz $\mathcal{N}$. Jedinična kugla $\mathcal{A}_1$ je očito gusta u normi u jediničnoj kugli uniformnog zatvorenja algebre $\mathcal{A}$, pa možemo pretpostaviti da je $\mathcal{A}$ C*-algebra.

S obzirom da je σ-jaka* topologija jača od σ-jake topologije, to je zatvorenje algebre $\mathcal{A}$ u σ-jakoj* topologiji podskup zatvorenja algebre $\mathcal{A}$ u σ-jakoj topologiji.

Prema teoremi o bikomutanti σ-jako* zatvorenje od $\mathcal{A}$ je gusto u skupu $\mathcal{M}$, tj. $\mathcal{M}$ je podskup σ-jakom* zatvorenju skupa $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{M}$ podskup i σ-jakom zatvorenju skupa $\mathcal{A}$, pa je i σ-jako zatvorenje skupa $\mathcal{A}$ gusto u $\mathcal{M}$. Otuda je i $\mathcal{A}_{sa}$ σ-jako gust u $\mathcal{M}_{sa}$.

Posmatrajmo realnu funkciju

$$f(\lambda) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \quad .$$

Ova funkcija strogo raste od -1 do 1 na intervalu $[-1,1]$ i ima rang $[-1,1]$. Definišimo funkciju $f : \mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}$ sa

$$f(A) = 2A(\boldsymbol{I}+A^2)^{-1} \, .$$

Za ma koju C*-podalgebru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, funkcija f preslikava $\mathcal{B}_{sa}$ u $\mathcal{B}_{1sa}$.

Dokažimo da je f bijekcija sa $\mathcal{B}_{1sa}$ na $\mathcal{B}_{1sa}$. Neka je $B \in \mathcal{B}_{1sa}$. Tada je $\|B\| \leq 1$, tako da je spektar operatora B sadržan u $[-1,1]$. Operator B možemo napisati u obliku

$$Bx = \int_{-1}^{1} \lambda dE_\lambda x \, ,$$

gdje je E_λ spektralna familija operatora B. Uzmimo sada operator A definisan sa

$$Ax = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} dE_\lambda x \qquad (\, x \in \mathcal{H}\,).$$

Tada, koristeći jednakost

$$f(A)g(A)x = \int f(\lambda)g(\lambda)dE_\lambda x \ ,$$

dobijamo

$$\left(B\cdot A^2 - 2A + B\right)x \overset{(2)}{=} B\int_{-1}^{1}\left(\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2 dE_\lambda x - 2\int_{-1}^{1}\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} dE_\lambda x + Bx =$$

$$\int_{-1}^{1}\lambda dE_\lambda \cdot \int_{-1}^{1}\left(\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2 dE_\lambda x - 2\int_{-1}^{1}\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} dE_\lambda x + \int_{-1}^{1}\lambda dE_\lambda x \overset{(2)}{=}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\lambda\left(\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}\right)^2 - 2\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} + \lambda\right] dE_\lambda x \,.$$

Lako se provjerava da je posljednji integral jednak 0. Znači

$$BA^2 - 2A + B = 0,$$

tj.

$$B(A^2 + \boldsymbol{I}) = 2A.$$

Operator $(\boldsymbol{I}+A^2)$ ima ograničen inverz pa je $B = 2A(\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}$, što znači da je preslikavanje $A \to f(A) = 2A(\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}$ preslikavanje na $\mathcal{B}_{1sa}$.

Pokažimo da je $f(A)$ σ-jako neprekidna funkcija. Za $A,B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dobijamo

$$\frac{1}{2}\,[f(A) - f(B)] = A(\boldsymbol{I}+A^2)^{-1} - B(\boldsymbol{I}+B^2)^{-1} =$$

$$= (\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}\,[A(\boldsymbol{I}+B^2) - (\boldsymbol{I}+A^2)B\,]\,(\boldsymbol{I}+B^2)^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}\,[\,(A-B) + A(B-A)B\,]\,(\boldsymbol{I}+B^2)^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}\,(A-B)\,(\boldsymbol{I}+B^2)^{-1} + (\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}A(B-A)B(\boldsymbol{I}+B^2)^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{I}+A^2)^{-1}\,(A-B)\,(\boldsymbol{I}+B^2)^{-1} + \frac{1}{4} f(A)\,(B-A)\,f(B)\,,$$

što povlači σ-jaku neprekidnost funkcije f. Iz σ-jake neprekidnosti funkcije f slijedi da je $\mathcal{A}_{1sa} = f(\mathcal{A}_{sa})$ σ-jako gust u $\mathcal{M}_{1sa} = f(\mathcal{M}_{sa})$.

Da bismo kompletirali dokaz, posmatrajmo Hilbertov prostor $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Svaki operator $A \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$ možemo predstaviti pomoću 2×2 matrice (A_{ij}), $i,j=1,2$. Označimo sa $\widetilde{\mathcal{A}}$ (respektivno $\widetilde{\mathcal{M}}$) operatore u $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$, takve da $A_{ij} \in \mathcal{A}$, $i,j=1,2$ (respektivno $A_{ij} \in \mathcal{M}$). Jasno je da su $\widetilde{\mathcal{A}}$ i $\widetilde{\mathcal{M}}$ *-algebre na $\widetilde{\mathcal{H}}$ i da je $\widetilde{\mathcal{A}}$ slabo gust u $\widetilde{\mathcal{M}}$.
Odaberimo sada $B \in \mathcal{M}$ takvo da je $\|B\| \leq 1$ i definišimo $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ sa

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je $\widetilde{B}^* = \widetilde{B}$ i $\|\widetilde{B}\| \leq 1$. Prema prvom dijelu dokaza postoje

operatori

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{A}}_1, \text{ gdje je } A_{12} = A_{21}^*,$$

takvi da $\widetilde{A}$ konvergira σ-jako ka $\widetilde{B}$. Tada A_{12} konvergira σ-jako ka B i $A_{12}^* = A_{21}$ konvergira σ-jako ka B^*. Prema tome, A_{12} konvergira σ-jako* ka B. Uz to vrijedi $\|A_{12}\| \leq \|\widetilde{A}\| \leq 1$. □

2.3. NORMALNA STANJA I PREDUAL

Ako je μ σ-konačna mjera, onda je $L^{\infty}(d\mu)$ von Neumannova algebra operatora množenja na Hilbertovom prostoru $L^2(d\mu)$. Prostor $L^{\infty}(d\mu)$ je dual prostora $L^1(d\mu)$. Međutim, $L^1(d\mu)$ je zatvoren u normi podprostor duala $L^{\infty}(d\mu)^*$ prostora $L^{\infty}(d\mu)$.
U ovom poglavlju, izabraćemo podskup analogan dualu von Neumannove algebre $\mathcal{M}$, koji se naziva predual, i proučiti njegove osobine.

Definicija 2.23. *Predual von Neumannove algebre $\mathcal{M}$ je prostor svih σ-slabo neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathcal{M}$ i označavamo sa $\mathcal{M}_*$.*

Primjetimo da smo ovu definiciju već dali u specijalnom slučaju, kada je $\mathcal{M}=\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ako je ω priozvoljan funkcional na $\mathcal{M}$, koji je neprekidan u odnosu na bilo koju lokalno konveksnu topologiju inducirana pomoću $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, tada prema Hahn-Banachovoj teoremi, ω možemo produžiti da neprekidnog linearnog funkcionala na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Prema Propoziciji 2.13, može se σ-slabo neprekidan funkcional, u Definiciji 2.23, zamijeniti sa σ-jako* neprekidnim funkcionalom. Osim toga, svi su elementi $\omega\in\mathcal{M}_*$ oblika

$$\omega(A)=\sum_n(\xi_n, A\eta_n),$$

gdje je $\sum_n\|\xi_n\|^2<+\infty$ i $\sum_n\|\eta_n\|^2<+\infty$.

Propozicija 2.24. *Predual $\mathcal{M}_*$ von Neumannove algebre $\mathcal{M}$ je Banachov prostor u normi prostora $\mathcal{M}^*$ i $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}_*$ čine dualan par prostora u odnosu na bilinearnu formu*

$$\mathcal{M}\times\mathcal{M}_* \ni (A,\omega)\to\omega(A).$$

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{M}^{\perp}$ elemente iz $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$ koji su ortogonalni na $\mathcal{M}$. Kako je $\mathcal{M}$ σ-slabo zatvoren podprostor prostora $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, to je $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$. Dalje, Hahn-Banachova teorema nam osigurava da proizvoljan element iz $\mathcal{M}_*$ možemo produžiti do $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$. Uz to, bilo koji element u $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$ definiše element u $\mathcal{M}_*$ pomoću restrikcije. Otuda se $\mathcal{M}_*$ može kanonski identifikovati sa Banachovim prostorom $\mathcal{L}_*/\mathcal{M}^{\perp}$. S obzirom da je $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dual prostora $\mathcal{L}_*(\mathcal{H})$, (prema Propoziciji 2.9.), to je $\mathcal{M}$ dual prostora $\mathcal{L}_*/\mathcal{M}^\perp$. □

Propozicija 2.24. tvrdi da je svaka von Neumannova algebra dual Banachovog prostora. Interesantno je primjetiti da nam ovo može poslužiti kao apstraktna definicija von Neumannove algebre:

Teorema (Sakai) *C^*- algebra $\mathcal{A}$ je $*$-izomorfna sa nekom von Neumannovom algebrom ako i samo ako je $\mathcal{A}$ dual Banachovog prostora.*

Dokaz ove teoreme izostavljamo jer nam u nastavku nije potreban.

Pređimo sad na karakterizaciju pozitivnih funkcionala u $\mathcal{M}_*$.

Lema 2.25. *Neka je $\{A_\alpha\}$ rastuća mreža u $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ s gornjom granicom u $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+$. Tada $\{A_\alpha\}$ ima najmanju gornju granicu A i mreža konvergira σ-jako ka A.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{R}_\alpha$ slabo zatvorenje skupa elemenata A_β, gdje je $\beta > \alpha$. Kako je jedinična kugla $\mathcal{L}(\mathcal{H})_1$ slabo kompaktna, postoji element A u $\bigcap_\alpha \mathcal{R}_\alpha$. Za sve A_α skup operatora $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$, takvih da $B \geq A_\alpha$, je slabo zatvoren i sadrži $\mathcal{R}_\alpha$, dakle, $A \geq A_\alpha$.

Znači, A majorizira $\{A_\alpha\}$ i leži u slabom zatvorenju od $\{A_\alpha\}$. Ako je B drugi operator koji majorizira $\{A_\alpha\}$ onda B majorizira i slabo zatvorenje od $\{A_\alpha\}$. Tako je $B \geq A$ i A je najmanja gornja granica mreže $\{A_\alpha\}$. Konačno, ako $\xi \in \mathcal{H}$, onda je

$$\left\|(A - A_\alpha)\xi\right\|^2 \leq \left\|A - A_\alpha\right\| \cdot \left\|(A - A_\alpha)^{\frac{1}{2}}\xi\right\|^2$$

$$\leq \|A\| \cdot \left(\xi, (A - A_\alpha)\xi\right) \xrightarrow[\alpha]{} 0 .$$

S obzirom da se jaka i σ-jaka topologija podudaraju na jediničnoj kugli $\mathcal{L}(\mathcal{H})_1$, iz gornje relacije slijedi tvrdnja leme. □

Definicija 2.26. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra i ω pozitivan linearan funkcional na $\mathcal{M}$. Ako je*

$$\omega\left(\overline{\lim_{\alpha}} A_{\alpha}\right) = \overline{\lim_{\alpha}}\, \omega(A_{\alpha})$$

za sve rastuće mreže $\{A_\alpha\}$ u $\mathcal{M}_+$, koje imaju gornju granicu, onda ω nazivamo normalnim funkcionalom.

Teorema 2.27. *Neka je ω stanje na von Neumannovoj algebri $\mathcal{M}$ koja djeluje na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada su sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) ω je normalno stanje;
(2) ω je σ-slabo neprekidan;
(3) postoji matrica gustine ρ, tj. pozitivan nuklearan operator ρ na $\mathcal{H}$, sa $Tr(\rho)=1$, takav da $\omega(A) = Tr(\rho A)$.

Dokaz. (3)$\Rightarrow$(2) slijedi iz Propozicije 2.9.

(2)$\Rightarrow$(1) slijedi iz Leme 2.25.

(2)$\Rightarrow$(3) Ako je ω σ-slabo neprekidan funkcional onda postoje nizovi $\{\xi_n\}$ i $\{\eta_n\}$ vektora takvih da je

$$\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty, \quad \sum_n \|\eta_n\|^2 < +\infty$$

i

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\eta_n).$$

Definišimo $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}$ i uvedimo reprezentaciju π algebre $\mathcal{M}$ na $\widetilde{\mathcal{H}}$ na sljedeći način

$$\pi(A)\left(\bigoplus_n \psi_n\right) = \bigoplus_n \left(A\psi_n\right).$$

Neka je $\xi = \bigoplus_n \xi_n$, $\eta = \bigoplus_n \eta_n$. Tada je

$$\omega(A) = (\xi, \pi(A)\eta).$$

Kako je $\omega(A)$ realan za sve $A \in \mathcal{M}_+$, dobijamo

$$4\omega(A) = 2(\xi, \pi(A)\eta) + 2(\xi, \pi(A^*)\eta)$$

$$= 2(\xi, \pi(A)\eta) + 2(\eta, \pi(A)\xi)$$

$$= (\xi+\eta, \pi(A)(\xi+\eta)) - (\xi-\eta, \pi(A)(\xi-\eta)) \leq$$

$$\leq (\xi+\eta, \pi(A)(\xi+\eta)).$$

Prema Teoremi 1.29. znamo da postoji pozitivan $T \in \pi(\mathcal{M})'$ takav da je $0 \leq T \leq \dfrac{\boldsymbol{I}}{2}$ i da vrijedi

$$\begin{aligned}(\xi, \pi(A)\eta) &= (T(\xi+\eta), \pi(A)T(\xi+\eta)) \\ &= (\psi, \pi(A)\psi).\end{aligned}$$

Sada $\psi \in \widetilde{\mathcal{H}}$ ima oblik $\psi = \bigoplus_n \psi_n$ i zbog toga

$$\omega(A) = \sum_n (\psi_n, A\psi_n)\,.$$

Desna strana posljednje jednakosti može se iskoristiti da produžimo ω do σ-slabo neprekidnog pozitivnog linearnog funkcionala $\widetilde{\omega}$ na $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Kako je $\widetilde{\omega}(I) = 1$, $\widetilde{\omega}$ je stanje. Prema Propoziciji 2.9, postoji nuklearan operator ρ, gdje je $Tr(\rho) = 1$, takav da

$$\widetilde{\omega}(A) = Tr(\rho A).$$

Neka je P projektor sa područjem vrijednosti $\{\xi\}$. Tada je

$$(\xi, \rho\xi) = Tr(P\rho P) = Tr(\rho P) = \widetilde{\omega}(P) \geq 0.$$

To znači da je ρ pozitivan operator.

(1)⇒(2) Pretpostavimo da je ω normalno stanje na $\mathcal{M}$. Neka je $\{B_\alpha\}$ rastuća mreža elemenata u $\mathcal{M}_+$ takva da je $\|B_\alpha\| \leq 1$ za sve α, i takva da je preslikavanje $A \to \omega(AB_\alpha)$ σ-jako neprekidno za sve α. Možemo iskoristiti Lemu 2.25. da definišemo

$$B = \overline{\lim} B_\alpha = \sigma\text{-jaki} \lim_\alpha B_\alpha\,.$$

Tada je $0 \leq B \leq I$ i $B \in \mathcal{M}$. Uz to, za sve $A \in \mathcal{M}$ vrijedi

$$\left|\omega(AB - AB_\alpha)\right|^2 = \left|\omega(A(B-B_\alpha)^{\frac{1}{2}}(B-B_\alpha)^{\frac{1}{2}})\right|^2 \leq$$

$$\leq \omega(A(B-B_\alpha)A^*)\cdot\omega(B-B_\alpha)$$

$$\leq \|A\|^2\,\omega(B-B_\alpha)\,.$$

Dakle,

$$\left\|\omega(\cdot B)-\omega(\cdot B_\alpha)\right\| \leq \left(\omega(B-B_\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Osim toga, ω je normalan funkcional. Prema tome, $\omega(B - B_\alpha) \to 0$ i $\omega(\cdot B_\alpha)$ teži ka $\omega(\cdot B)$ u normi. Kako je $\mathcal{M}_*$ Banachov prostor, to $\omega(\cdot B) \in \mathcal{M}_*$. Sada, primjenjujući Zornovu lemu, možemo naći maksimalan element $P \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_1$ takav da je preslikavanje $A \to \omega(AP)$ σ-jako neprekidno. Ako je $P = I$, teorema je dokazana.

Pretpostavimo da je $P \neq I$. Stavimo $P' = I - P$ i izaberimo vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takav da je $\omega(P') < (\xi, P'\xi)$.

Ako je $\{B_\alpha\}$ rastuća mreža u $\mathcal{M}_+$ takva da je

$$B_\alpha \leq P', \quad \omega(B_\alpha) \geq (\xi, B_\alpha \xi) \quad \text{i} \quad B = \overline{\lim_\alpha} B_\alpha = \sigma\text{-jaki} \lim_\alpha B_\alpha,$$

onda $B \in \mathcal{M}_+$, $B \leq P'$ i $\omega(B) = \sup \omega(B_\alpha) \geq \sup(\xi, B_\alpha \xi) = (\xi, B\xi)$.

Zato, prema Zornovoj lemi, postoji maksimalan element $B \in \mathcal{M}_+$ takav da je

$$B \leq P' \text{ i } \omega(B) \geq (\xi, B\xi).$$

Stavimo $Q = P' - B$.

Tada je $Q \in \mathcal{M}_+$ i $Q \neq 0$. Naime, ako bi bilo $Q = 0$, onda bi vrijedilo $P' = B$ i dalje

$$\omega(B) = \omega(P') < (\xi, P'\xi) = (\xi, B\xi),$$

tj.

$$\omega(B) < (\xi, B\xi). \qquad (\Diamond)$$

S druge strane, zbog $\omega(B_\alpha) \geq (\xi, B_\alpha \xi)$ i $(\xi, B_\alpha \xi) \to (\xi, B\xi)$ imamo $(\xi, B\xi) \leq \omega(B)$ što je nemoguće zbog $(\Diamond)$.

Ako je $A \in \mathcal{M}_+$, $A \leq Q$, $A \neq 0$, onda je $\omega(A) < (\xi, A\xi)$.

Zaista, ako bi bilo $\omega(A) \geq (\xi, A\xi)$, onda bi vrijedilo

$$\omega(A+B) \geq \omega(A) + \omega(B) \geq (\xi, A\xi) + (\xi, B\xi) = (\xi, (A+B)\xi). \qquad (\Diamond\Diamond)$$

S druge strane bi imali $A \leq Q = P' - B$, tj. $A+B \leq P'$.
Odavde i iz $(\Diamond\Diamond)$, zbog maksimalnosti elementa B slijedi $A+B \leq B$. Pored toga, zbog $A \geq 0$ imali bi $A+B \geq B$. Znači, $A+B = B$, tj. $A = 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $A \neq 0$.

Za proizvoljan $A \in \mathcal{M}$ vrijedi

$$QA^*AQ \le \|A\|^2 Q^2 \le \|A\|^2 \|Q\| Q \ .$$

Odavde je

$$\frac{QA^*AQ}{\|A\|^2\|Q\|} \le Q$$

i

$$\omega(QA^*AQ) < (\xi, QA^*AQ\xi).$$

Kombinujući ove nejednakosti sa nejednakošću Cauchy-Schwarza nalazimo

$$|\,\omega(AQ)|^2 \le \omega(I)\ \omega(QA^*AQ) < (\xi, QA^*AQ\xi) = \|AQ\xi\|^2 .$$

Tako dobijamo da su preslikavanja $A \to \omega(AQ)$ i $A \to \omega(A(P+Q))$ σ-jako neprekidna. Kako je $P+Q \le I$, ovo je protivrječno maksimalnosti operatora P. □

Znamo da se σ-slabo neprekidni linearni funkcional može predstaviti kao linearna kombinacija 4 σ-slabo neprekidna stanja. Zato iz Teoreme 2.27, slijedi da σ-slaba topologija zavisi samo od uređenja von Neumannove algebre, a ne od reprezentacije Hilbertovog prostora. To dalje povlači da su izomorfizmi i homomorfizmi između von Neumannovih algebri automatski neprekidni u σ-slaboj topologiji. Ove zaključke ćemo izložiti u vidu narednih teorema. No prije toga ćemo dati karakterizaciju σ-slabo zatvorenih ideala von Neumannove algebre.

Propozicija 2.28. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra i $\mathcal{I}$ σ-slabo zatvoren dvostrani ideal u $\mathcal{M}$. Tada postoji projekcija $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, takva da je $\mathcal{I} = \mathcal{M}E$.*

Dokaz. Primjetimo prvo da je ideal $\mathcal{I}$ autoadjungovan. Naime, ako operator $A \in \mathcal{I}$ ima polarnu dekompoziciju, tj. $A = U|A|$, onda $A^*A \in \mathcal{I}$ i $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{I}$.

Prema tome, $A^* = |A|U^* \in \mathcal{I}$.

Prema Lemi 2.25, postoji najveća projekcija $E \in \mathcal{I}$. Ako je $\{E_\alpha\}$ aproksimativna jedinica, možemo staviti E = σ-jaki limE_α. Tada je E jedinica ideala $\mathcal{I}$. Stoga, za $A \in \mathcal{M}$ dobijamo

$$AE = (AE)E = E(AE) = (EA)E = E(EA) = EA.$$

Znači, $E \in \mathcal{M}'$, odnosno $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$. □

Teorema 2.29. *Neka su* $\mathcal{M}$ *i* $\mathcal{N}$ *von Neumannove algebre i* τ **-homomorfizam sa* $\mathcal{M}$ *na* $\mathcal{N}$*. Tada je* τ *σ-slabo i σ-jako neprekidan homomorfizam.*

Dokaz. Neka je $\{A_\alpha\}$ rastuća mreža u $\mathcal{M}_+$. Definišimo A sa

$$A = \overline{\lim_\alpha} A_\alpha = \sigma\text{-slabi} \lim_\alpha A_\alpha .$$

Tada je $\tau(A) = \overline{\lim_\alpha} \tau(A_\alpha) = \sigma\text{-slabi} \lim_\alpha \tau(A_\alpha)$, jer je τ preslikavanje "na" i čuva pozitivnost. Stoga, ako je ω normalno stanje na $\mathcal{N}$, onda je $\omega \circ \tau$ normalno stanje na $\mathcal{M}$. Dokažimo da je τ σ-slabo neprekidan homomorfizam.

Uzmimo bilo koja dva niza $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ $(\xi_k, \eta_k \in \mathcal{H})$ za koje je

$$\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty , \quad \sum_n \|\eta_n\|^2 < +\infty .$$

Tada je sa

$$\omega(B) = \sum_k (\xi_k, B\eta_k) \qquad (B \in \mathcal{N}),$$

zadan linearan funkcional na $\mathcal{N}$. On se može prikazati u obliku

$$\omega(B) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(B) \qquad (B \in \mathcal{N}),$$

gdje su ω_i normalna stanja. Pomoću $\omega(B)$ definišimo funkcional $(\omega \circ \tau)(A)$, $A \in \mathcal{M}$ sa

$$(\omega \circ \tau)(A) = \sum_k (\xi_k, \tau(A)\eta_k) \qquad (A \in \mathcal{M}).$$

Sada imamo

$$(\omega \circ \tau)(A) = \sum_{i=1}^{k} (\omega_i \circ \tau)(A) . \tag{*}$$

Prema prvom dijelu dokaza, funkcionali $\omega_i \circ \tau$ su normalna stanja, a u Teoremi 2.27. je dokazano da su normalna stanja σ-slabo neprekidna. Znači, iz $A_\alpha \overset{\sigma-slabo}{\rightarrow} A$, slijedi

$$(\omega_i \circ \tau)(A_\alpha) \rightarrow (\omega_i \circ \tau)(A) \qquad (i = 1,2,\ldots).$$

Odavde i iz (*) slijedi

$$(\omega \circ \tau)(A_\alpha) \rightarrow (\omega \circ \tau)(A).$$

Znači, iz $A_\alpha \overset{\sigma-slabo}{\rightarrow} A$ slijedi

$$\sum_k (\xi_k, \tau(A_\alpha)\eta_k) \rightarrow \sum_k (\xi_k, \tau(A)\eta_k),$$

i to za svaka dva niza {ξk}, {ηk} za koje je $\sum_n \|\xi_n\|^2 < +\infty$, $\sum_n \|\eta_n\|^2 < +\infty$. To znači da

$$\tau(A_\alpha) \overset{\sigma-slabo}{\rightarrow} \tau(A).$$

Prema tome, iz $A_\alpha \overset{\sigma-slabo}{\rightarrow} A$ slijedi $\tau(A_\alpha) \overset{\sigma-slabo}{\rightarrow} \tau(A)$, pa je τ σ-slabo neprekidan homomorfizam algebri $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Ako A_α konvergira σ-jako ka 0, onda $A_\alpha{}^*A_\alpha$ konvergira σ-slabo ka 0. Zbog toga, $\tau(A_\alpha)^*\tau(A_\alpha) = \tau(A_\alpha{}^*A_\alpha)$ konvergira σ-slabo ka 0 i $\tau(A_\alpha)$ konvergira σ-jako ka 0. □

Teorema 2.30. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra, ω normalno stanje na $\mathcal{M}$ i neka je $(\mathcal{H},\pi,\Omega)$ odgovarajuća ciklička reprezentacija. Tada je $\pi(\mathcal{M})$ von Neumannova algebra i π je normalan u smislu $\pi(\overline{\lim_\alpha} A_\alpha) = \overline{\lim_\alpha} \pi(A_\alpha)$, za bilo koju ograničenu rastuću mrežu $\{A_\alpha\}$ u $\mathcal{M}_+$.*

Dokaz. Ako $A_\alpha PA$ u $\mathcal{M}$ onda je $\pi(A_\alpha)$ rastući niz i $\pi(A_\alpha) \leq \pi(A)$, za svako α. Kako je ω normalno stanje, za proizvoljan element $B \in \mathcal{M}$, dobijamo

$$(\pi(B)\Omega, \pi(A)\pi(B)\Omega) = \omega(B^*AB)$$

$$= \omega(\overline{\lim_\alpha} B^* A_\alpha B) = \overline{\lim_\alpha} \omega(B^* A_\alpha B) =$$

$$= \overline{\lim_{\alpha}}(\pi(B)\Omega, \pi(A_{\alpha})\pi(B)\Omega),$$

za svako $B \in \mathcal{M}$. Osim toga, skup $\pi(\mathcal{M})\Omega$ je gust u normi u $\mathcal{H}$, tako da je π normalan.

Nastavljajući kao u dokazu Teoreme 2.29, slijedi da je π σ-slabo neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{M}$ u $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Stoga je jezgro $\mathcal{I}$ preslikavanja π σ-slabo zatvoren ideal u $\mathcal{M}$. Prema Propoziciji 2.28, postoji projekcija $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ takva da je $\mathcal{I} = \mathcal{M}E$.

Zbog $\pi(A(I-E)) = \pi(A)$, π je vjerna reprezentacija von Neumannove algebre $\mathcal{M}(I-E)$. Možemo pretpostaviti da je π vjerna reprezentacija. Tada je π izometrično preslikavanje. Tako π preslikava jediničnu kuglu $\mathcal{M}_1$ na jediničnu kuglu $\pi(\mathcal{M})_1$. Uz to, $\mathcal{M}_1$ je σ-slabo kompaktan skup i π je σ-slabo neprekidno preslikavanje. Otuda je $\pi(\mathcal{M})_1$ σ-slabo kompaktan i σ-slabo zatvoren skup. Prema teoremi o bikomutanti, $\pi(\mathcal{M})$ je von Neumannova algebra. □

2.4. KVAZIEKVIVALENCIJA REPREZENTACIJA

Uvedimo najprije koncept unitarne ekvivalencije dviju reprezentacija neke C*-algebre $\mathcal{A}$. Ako je $(\mathcal{H},\pi)$ reprezentacija neke C*-algebre, onda je lako konstruisati i neku drugu reprezentaciju. Na primjer, ako za unitaran operator U na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, uvedemo π_U sa

$$\pi_U(A) = U\pi(A)U^*,$$

tada će $(\mathcal{H},\pi_U)$ biti druga reprezentacija te C*-algebre.

Za dvije reprezentacije $(\mathcal{H}_1,\pi_1)$ i $(\mathcal{H}_2,\pi_2)$ ćemo reći da su unitarno ekvivalentne ako postoji unitaran operator $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, takav da je

$$\pi_1(A) = U\pi_2(A)U^*, \quad \text{za svako } A\in\mathcal{A},$$

i pisati $\pi_1 \cong \pi_2$.

Iz teorije reprezentacija je poznato da su reprezentacije $(\mathcal{H}_1,\pi_1)$ i $(\mathcal{H}_2,\pi_2)$ unitarno ekvivalentne ako i samo ako jedinični vektori iz $\mathcal{H}_1$ i jedinični vektori iz $\mathcal{H}_2$ definišu isti skup stanja na $\mathcal{A}$.

U nastavku ćemo predstaviti nešto slabiji, ali prirodniji, koncept ekvivalencije koji je važan za primjene u fizici. To je koncept kvaziekvivalencije dviju reprezentacija.

Definicija 2.31. *Ako je π reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$, onda se za stanje ω na $\mathcal{A}$ kaže da je π-normalno ako postoji normalno stanje ρ na $\pi(\mathcal{A})''$, takvo da je*

$$\omega(A) = \rho(\pi(A)), \quad \text{za svako } A\in\mathcal{A}.$$

Za dvije reprezentacije π_1 i π_2 C-algebre $\mathcal{A}$ se kaže da su kvaziekvivalentne i piše $\pi_1 \approx \pi_2$, ako je svako π_1-normalno stanje i π_2-normalno i obratno.*

Ako je $(\mathcal{H},\pi)$ reprezentacija C*-algebre $\mathcal{A}$, onda sa $n\pi$ označavamo reprezentaciju algebre $\mathcal{A}$ na prostoru $n\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{n}\mathcal{H}$, definisanu sa

$$n\pi(A)\left(\bigoplus_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \bigoplus_{k=1}^{n}\left(\pi(A)\xi_k\right).$$

Preslikavanje $n\pi(A) \to \pi(A)$, $A \in \mathcal{A}$ je izomorfizam, pa iz Leme 2.17. slijedi da je $(n\pi(\mathcal{A}))''$ izomorfno sa $\pi(\mathcal{A})''$.

U sljedećoj teoremi se između ostalog, daje i veza između kvaziekvivalencije i unitarne ekvivalencije.

Teorema 2.32. *Neka je $\mathcal{A}$ C*-algebra i neka su $(\mathcal{H}_1,\pi_1)$ i $(\mathcal{H}_2,\pi_2)$ nedegenerisane reprezentacije algebre $\mathcal{A}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) *postoji izomorfizam $\tau : \pi_1(\mathcal{A})'' \to \pi_2(\mathcal{A})''$ takav da je $\tau(\pi_1(A)) = \pi_2(A)$, za sve $A \in \mathcal{A}$;*

(2) *$\pi_1 \approx \pi_2$, tj. π_1-normalna stanja i π_2-normalna stanja su jednaka;*

(3) *postoje kardinali n i m, projekcije $E_1' \in n\pi_1(\mathcal{A})'$, $E_2' \in m\pi_2(\mathcal{A})'$ i unitarni operatori $U_1 : \mathcal{H}_1 \to E_2'(m\mathcal{H}_2)$, $U_2 : \mathcal{H}_2 \to E_1'(n\mathcal{H}_1)$ takvi da je*

$$U_1\pi_1(A)U_1^* = m\pi_2(A)E_2',$$
$$U_2\pi_2(A)U_2^* = n\pi_1(A)E_1',$$

za sve $A \in \mathcal{A}$;

(4) *postoji kardinal n takav da je $n\pi_1 \cong n\pi_2$.*

Primjedba. Ova teorema, u suštini, sadrži dvije različite ideje; jedna je sadržana u ekvivalenciji tvrdnji (1) i (2) i odnosi se na reprezentacije π_1 i π_2, dok je druga sadržana u ekvivalencijama tvrdnje (1) sa (3) i (3) sa (4) i odnosi se na strukturu izomorfizama između von Neumannovih algebri, a posebno na pitanje kada su ti izomorfizmi unitarno implementirani. Na primjer, ako su π_1 i π_2 ireducibilne i kvaziekvivalentne reprezentacije, izomorfizam τ je unitarno implementiran i π_1 i π_2 su unitarno ekvivalentne. Analogno, ako i $\pi_1(\mathcal{A})''$ i $\pi_2(\mathcal{A})''$ sadrže separirajući i ciklički vektor, onda je τ unitarno implementiran (što ćemo dokazati kasnije) i opet su π_1 i π_2 unitarno ekvivalentne reprezentacije.

Dokaz Teoreme 2.32. (1)⇒(2) Neka je ω π_1-normalno stanje na algebri $\mathcal{A}$. To znači da postoji normalno stanje algebre $(\pi_1(\mathcal{A}))''$ za koje je

$$\omega(A) = \rho(\pi_1(A)), \quad \text{za svako } A \in \mathcal{A}.$$

Odavde dobijamo

$$\omega(A) = (\rho\circ\pi_1)(A) = \rho\circ\tau^{-1}\circ\tau\circ\pi_1(A) = \rho\circ\tau^{-1}\circ\pi_2(A) = \rho\circ\tau^{-1}(\pi_2(A)) .$$

Primjenom Teoreme 2.29. dobijamo da je $\rho\circ\tau^{-1}$ normalno stanje algebre $\pi_2(\mathcal{A})$.

Iz jednakosti

$$\omega(A) = (\rho\circ\tau^{-1})(\pi_2(A)),$$

slijedi da je ω π_2-normalno stanje.
Obratnu implikaciju dobijamo zamjenom uloga τ i τ^{-1}.

(2)⇒(3) Poznato je da π_1 možemo prikazati kao direktnu sumu cikličkih reprezentacija, tj. možemo naći skup $\{\xi_\alpha\}$ jediničnih vektora u $\mathcal{H}$ takvih da su potprostori $[\pi_1(\mathcal{A})\xi_\alpha]$ međusobno ortogonalni i $\sum_\alpha[\pi_1(\mathcal{A})\xi_\alpha]= \boldsymbol{I}$. Neka su

$$\omega_\alpha(A) = (\xi_\alpha, \pi_1(A)\xi_\alpha) \qquad (A\in\mathcal{A}),$$

stanja koja odgovaraju vektorima ξ_α. Po pretpostavci, ω_α je π_2-normalno stanje za svako α. Prema Teoremi 2.27, postoji niz $\{\eta_{\alpha,n}\}$ u $\mathcal{H}_2$ za koji je $\sum_n\|\eta_{\alpha,n}\|^2 = 1$ i

$$\omega_\alpha(A) = \sum_n(\eta_{\alpha,n},\pi_2(A)\eta_{\alpha,n}) = \sum_n(\sum_m\eta_{\alpha,m},\pi_2(A)\eta_{\alpha,n}) =$$

$$= \sum_n(\eta_\alpha,\pi_2(A)\eta_{\alpha,n}) = (\eta_\alpha,\sum_n\pi_2(A)\eta_{\alpha,n}) = (\eta_\alpha, \aleph_0\,\pi_2(A)\sum_n\eta_{\alpha,n})$$

$$= (\eta_\alpha, \aleph_0\,\pi_2(A)\eta_\alpha) ,$$

za $A\in\mathcal{A}$, gdje je $\eta_\alpha = \bigoplus_n \eta_{\alpha,n} \in \aleph_0\,\mathcal{H}_2$.

Otuda, prema Teoremi 1.17, postoji unitarni operator

$$U_\alpha : [\pi_1(\mathcal{A})\xi_\alpha] \to [\aleph_0\,\pi_2(\mathcal{A})\eta_\alpha],$$

takav da je

$$U_\alpha\pi_1(A)U_\alpha^* = \aleph_0\,\pi_2(A)[\aleph_0\,\pi_2(\mathcal{A})\eta_\alpha].$$

Ako je k kardinalni broj skupa $\{\alpha\}$, sabiranjem dobijamo izometriju $U_1 = \sum_\alpha U_\alpha$ sa

$\mathcal{H}_1 = \oplus_\alpha [\pi_1(\mathcal{A})\xi_\alpha]$ na $k\aleph_0 \mathcal{H}_2 = \oplus_\alpha (\aleph_0 \mathcal{H}_2)$, čiji je rang

$$\oplus_\alpha [\aleph_0 \pi_2(\mathcal{A})\eta_\alpha] = E_2'(\oplus_\alpha (\aleph_0 \mathcal{H}_2))$$

i za koju vrijedi

$$U_1\pi_1(A)U_1^* = k\aleph_0 \pi_2(A)E_2'.$$

Ovim je dokazan prvi dio tvrdnje (3). Zamjenom uloga π_1 i π_2 dobija se i drugi dio tvrdnje (3).

(3)⇒(4) Možemo smatrati da su n i m u tvrdnji (3) beskonačni, tj. ako stavimo $k = \sup\{n,m\}$, dobićemo $kn = km = k$. Iz (3) slijedi da je $k\pi_1$ unitarno ekvivalentna reprezentacija sa podreprezentacijom od $mk\pi_2 = k\pi_2$, i $k\pi_2$ je unitarno ekvivalentna sa podreprezentacijom od $nk\pi_1 = k\pi_1$. Odavde slijedi da su $k\pi_1$ i $k\pi_2$ unitarno ekvivalentne.

(4)⇒(1) slijedi iz Leme 2.17. □

3.
MODULARNA TEORIJA TOMITA-TAKESAKI

U ovoj glavi biće konstruisan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ sa "pozitivnim samodualnim konusom" $\mathcal{P}$ takav da pozitivni elementi u $\mathcal{M}_*$ odgovaraju vektorima u $\mathcal{P}$ i da automorfizmi od $\mathcal{M}$ odgovaraju unitarnim elementima u $\mathcal{H}$, u odnosu na koje je $\mathcal{P}$ invarijantan. Iako je opći opis konusa $\mathcal{P}$ sličan opisu konusa za abelovu algebru $\mathcal{M}$, javlja se suštinska razlika koja proizilazi iz nekomutativnosti.

Neka $\mathcal{M}$ djeluje na $\mathcal{H}$ i neka je vektor Ω ciklički za $\mathcal{M}$. Tada se može formirati konveksan konus $A^*A\Omega$ vektora u $\mathcal{H}$. Ako $\mathcal{M}$ nije abelova algebra tada konus ne mora nužno imati svojstvo samodualnosti. Ne postoji razlog zbog kojeg bi pridruženo stanje $\omega(A)=(\Omega, A\Omega)$ zadovoljavalo nejednakost $\omega(A^*AB^*B) \geq 0$. Ukoliko je ω trag, tj. ako $\omega(AB) = \omega(BA)$, za sve $A,B\in\mathcal{M}$, onda će vrijediti posljednja nejednakost.

Definišimo operator konjugacije J na prostoru $\mathcal{H}$ na sljedeći način

$$JA\Omega = A^*\Omega.$$

Koristeći svojstvo traga ω, dobijamo

$$\|A\Omega\|^2 = \omega(A^*A) = \omega(AA^*) = \|A^*\Omega\|^2.$$

Osim toga,

$$JAJB\Omega = JAB^*\Omega = (AB^*)^*\Omega = BA^*\Omega.$$

Za abelovu algebru $\mathcal{M}$ posljednje jednakosti pokazuju da J implementira *-konjugaciju, tj. $A^* = j(A)$, gdje se j definiše sa $j(A) = JAJ$. U slučaju kada je ω trag, djelovanje operatora j je složenije. Na primjer, jednakost

$$(B_1\Omega, A_1 j(A_2)B_2\,\Omega) = (B_1\Omega, A_1 JA_2J B_2\,\Omega) = (B_1\Omega, A_1B_2A_2^*\,\Omega)$$

$$= \omega(B_1^*A_1B_2A_2^*) = (B_1\Omega, j(A_2)A_1B_2\,\Omega),$$

pokazuje da $j(A)\in\mathcal{M}'$, svojstvo koje vrijedi i u abelovom slučaju.

Primjer traga upućuje da opći samodualni konus treba konstruisati modifikacijom *-konjugacije u skupu $AA^*\Omega$, element A^* treba zamijeniti konjugovanim elementom $j(A)$, a konjugacija j treba omogućiti preslikavanje sa $\mathcal{M}$ u $\mathcal{M}'$. Ispitivanje preslikavanja $A\Omega \mapsto A^*\Omega$ je polazna tačka teorije Tomita – Takesaki koju ćemo razmatrati u poglavlju 3.2. Prije toga ćemo uvesti i analizirati klase algebri koje su od značaja u primjeni ove teorije.

3.1. σ-KONAČNE VON NEUMANNOVE ALGEBRE

Sve von Neumannove algebre koje susrećemo u kvantnoj statističkoj mehanici i kvantnoj teoriji polja pripadaju sljedećoj klasi.

Definicija 3.1. *Von Neumannovu algebru* $\mathcal{M}$ *nazivamo* σ*-konačnom ako sve kolekcije međusobno ortogonalnih projekcija imaju najviše prebrojivu kardinalnost.*

Primjetimo da je von Neumannova algebra na separabilnom Hilbertovom prostoru σ-konačna. Obratno ne vrijedi, ne mogu se sve σ-konačne von Neumannove algebre predstaviti na separabilnom Hilbertovom prostoru.

Definicija 3.2. *Neka je* $\mathcal{M}$ *von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$*. Podskup* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$ *je separirajući za* $\mathcal{M}$ *ako za bilo koji element* $A \in \mathcal{M}$*,*

$$A\xi = 0 \quad (\forall \xi \in \mathcal{R}), \ \Rightarrow A = 0.$$

Podsjetimo se da je podskup $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$ ciklički za $\mathcal{M}$ ako je $[\mathcal{M}\mathcal{R}] = \mathcal{H}$.

Propozicija 3.3. *Neka je* $\mathcal{M}$ *von Neumannova algebra na* $\mathcal{H}$ *i* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{H}$ *podskup. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) $\mathcal{R}$ *je ciklički za* $\mathcal{M}$*;*
(2) $\mathcal{R}$ *je separirajući za* $\mathcal{M}'$*.*

Dokaz. (1)⇒(2) Pretpostavimo da je $\mathcal{R}$ ciklički za $\mathcal{M}$ i izaberimo $A' \in \mathcal{M}'$ takav da je $A'\mathcal{R} = \{0\}$. Tada za proizvoljno $B \in \mathcal{M}$ i $\xi \in \mathcal{R}$, vrijedi $A'B\xi = BA'\xi = 0$.
Dakle, $A'[\mathcal{M}\mathcal{R}] = 0$ i $A' = 0$.

(2)⇒(1) Pretpostavimo da je $\mathcal{R}$ separirajući za $\mathcal{M}'$ i stavimo $P' = [\mathcal{M}\mathcal{R}]$. Tada je P' projekcija u $\mathcal{M}'$ i $(\boldsymbol{I} - P')\mathcal{R} = \{0\}$. Prema tome, $\boldsymbol{I} - P' = 0$ i $[\mathcal{M}\mathcal{R}] = \mathcal{H}$. □

Definicija 3.4. *Stanje* ω *na von Neumannovoj algebri* $\mathcal{M}$ *nazivamo vjernim stanjem ako je* $\omega(A) > 0$*, za sve nenulte* $A \in \mathcal{M}_+$*.*

Primjer 3.5. Neka je $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ separabilan. Svako normalno stanje ω nad $\mathcal{M}$ ima oblik

$\omega(A) = Tr(\rho A)$, gdje je ρ matrica gustine.

Ako je ω vjerno stanje, tada je $\omega(E) > 0$, za svaki projektor ranga jedan, tj. $\left\|\rho^{\frac{1}{2}}\psi\right\| > 0$, za svako $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Prema tome, matrica ρ je invertibilna (u skupu gusto definisanih hermitskih operatora na $\mathcal{H}$). Obratno, ako ω nije vjerno stanje, tada je $\omega(A^*A) = 0$, za neko nenulto A, pa je $\left\|\rho^{\frac{1}{2}} A^* \psi\right\| = 0$, za sve $\psi \in \mathcal{H}$, tj. matrica ρ nije invertibilna.
Primjetimo da, ako prostor $\mathcal{H}$ nije separabilan, tada matrica ρ može imati najviše prebrojivo mnogo nenultih karakterističnih vrijednosti i zato $\omega(A)$ mora iščeznuti za neko pozitivno A, tj. ω nije vjerno stanje. Prema tome, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ je σ-konačna algebra, tj. prostor $\mathcal{H}$ je separabilan ako i samo ako $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ima vjerno normalno stanje.
Sljedeća propozicija daje karakterizaciju σ-konačnih von Neumannovih algebri.

Propozicija 3.6. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) *algebra $\mathcal{M}$ je σ-konačna;*
(2) *postoji prebrojiv podskup prostora $\mathcal{H}$ koji je separirajući za $\mathcal{M}$;*
(3) *postoji vjerno normalno stanje na $\mathcal{M}$;*
(4) *algebra $\mathcal{M}$ je izomorfna s von Neumannovom algebrom $\pi(\mathcal{M})$ koja dopušta separirajući i cikličan vektor.*

Dokaz. (1)⇒(2) Neka je $\{\xi_\alpha\}$ maksimalna familija vektora u prostoru $\mathcal{H}$ takvih da su podprostori $[\mathcal{M}'\xi_\alpha]$ i $[\mathcal{M}'\xi_{\alpha'}]$ iz $\mathcal{H}$ ortogonalni za $\alpha \neq \alpha'$. Označimo ovdje projektor na podprostor $[\mathcal{M}'\xi_\alpha]$ sa P_α. Kako $\boldsymbol{I} \in \mathcal{M}'$, to vektor $\xi_\alpha = \boldsymbol{I}\xi_\alpha$ leži u $[\mathcal{M}'\xi_\alpha]$.

Dokažimo da $P_\alpha \in \mathcal{M}$.
Neka je $M_0' \in \mathcal{M}'$ bilo koji fiksan element. Tada za svaki $M' \in \mathcal{M}'$ imamo

$$(P_\alpha M_0' - M_0' P_\alpha) M' \xi_\alpha = P_\alpha M_0' M' \xi_\alpha - M_0' P_\alpha M' \xi_\alpha \,. \qquad (1)$$

Ali,

$$M_0{}'M'\xi_\alpha,\ M'\xi_\alpha \in [\mathcal{M}'\xi_\alpha]\ ,$$

tako da je

$$P_\alpha M_0{}'M'\xi_\alpha = M_0{}'M'\xi_\alpha$$

i

$$P_\alpha M'\xi_\alpha = M'\xi_\alpha.$$

Iz jednakosti (1) slijedi

$$(P_\alpha M_0{}' - M_0{}'P_\alpha)M'\xi_\alpha = 0, \quad (\ \forall M' \in \mathcal{M}'\ )\ . \tag{2}$$

Znači,

$$P_\alpha M_0{}' - M_0{}'P_\alpha = 0,$$

kada se ovaj operator posmatra na podprostoru $[\mathcal{M}'\xi_\alpha]$.

Dalje, pošto je $\sum_{\alpha'} P_{\alpha'}\mathcal{H} = \mathbf{I}$, ortogonalni komplement podprostora $P_\alpha\mathcal{H} = [\mathcal{M}'\xi_\alpha]$ biće jednak $\sum_{\alpha'\neq\alpha} P_{\alpha'}\mathcal{H} = \sum_{\alpha'\neq\alpha} \lfloor \mathcal{M}'\xi_{\alpha'} \rfloor$. No, operator $P_\alpha M_0{}' - M_0{}'P_\alpha$ se poništava i na svakom $P_{\alpha'}\mathcal{H} = [\mathcal{M}'\xi_{\alpha'}]$, u što se, na sličan način, možemo uvjeriti.

Znači, operator $P_\alpha M_0{}' - M_0{}'P_\alpha$ se svuda poništava, tako da je $P_\alpha M_0{}' - M_0{}'P_\alpha = 0$, tj.

$$P_\alpha M_0{}' = M_0{}'P_\alpha.$$

Zbog proizvoljnosti $M_0{}' \in \mathcal{M}'$, P_α komutira sa svim $M' \in \mathcal{M}'$, što daje

$$P_\alpha \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M}\ .$$

Na osnovu toga i činjenice da je algebra $\mathcal{M}$ σ-konačna, slijedi da je familija $\{\xi_\alpha\}$ prebrojiva. Ako iskoristimo maksimalnost familije $\{\xi_\alpha\}$, dobićemo

$$\sum_\alpha [\ P_\alpha\mathcal{H}\ ] = \mathbf{I}.$$

Znači, skup $\{\xi_\alpha\}$ je ciklički za $\mathcal{M}'$ i stoga, prema Propoziciji 3.3, skup $\{\xi_\alpha\}$ je separirajući za $\mathcal{M}$.

(2)⇒(3) Izaberimo niz vektora ξ_n tako da je skup $\{\xi_n\}$ separirajući za $\mathcal{M}$ i $\sum_n \|\xi_n\|^2 = 1$ i definišimo stanje ω na sljedeći način

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n A \xi_n) .$$

Stanje ω je σ-slabo neprekidno i, prema Teoremi 2.27, normalno. Ako je $\omega(A^*A)=0$, onda je

$$0 = (\xi_n, A^*A\xi_n) = \|A\xi_n\|^2 , \quad \text{za svako } n.$$

Dakle, $A = 0$, pa je ω vjerno normalno stanje.

(3)⇒(4) Neka je ω vjerno normalno stanje na $\mathcal{M}$ i $(\mathcal{H},\pi,\Omega)$ odgovarajuća ciklička reprezentacija. Prema Teoremi 2.30, $\pi(\mathcal{M})$ je von Neumannova algebra.
Ako je $\pi(A)\Omega = 0$, za neko $A \in \mathcal{M}$, tada je

$$\omega(A^*A) = \|\pi(A)\Omega\|^2 = 0,$$

dakle, $A^*A = 0$ i $A = 0$. Ovo dokazuje da je π vjerna reprezentacija i da je vektor Ω separirajući za $\pi(\mathcal{M})$.

(4)⇒(1) Neka je Ω separirajući (i ciklički) vektor za $\pi(\mathcal{M})$ i neka je $\{E_\alpha\}$ familija međusobno ortogonalnih projekcija u $\mathcal{M}$.
Stavimo $E = \sum_\alpha E_\alpha$. Tada je, prema Lemi 2.25,

$$\|\pi(E)\Omega\|^2 = (\pi(E)\Omega, \pi(E)\Omega) =$$

$$\sum_{\alpha,\alpha'} (\pi(E_\alpha)\Omega, \pi(E_{\alpha'})\Omega) = \sum_\alpha \|\pi(E_\alpha)\Omega\|^2 .$$

S obzirom da je $\sum_\alpha \|\pi(E_\alpha)\Omega\|^2 < +\infty$, samo prebrojivo mnogo $\pi(E_\alpha)\Omega$ je različito od nule što će, zbog izomorfnosti algebri $\mathcal{M}$ i $\pi(\mathcal{M})$ vrijediti za E_α.
Znači, $\mathcal{M}$ je σ-konačna algebra. □

3.2. MODULARNA GRUPA

Ako je $\mathcal{M}$ je σ-konačna von Neumannova algebra možemo, prema Propoziciji 3.6, pretpostaviti da $\mathcal{M}$ sadrži separirajući i cikličan vektor Ω. Preslikavanjem $A \mapsto A\Omega$ algebre $\mathcal{M}$ u prostor $\mathcal{H}$ se tada uspostavlja 1-1 linearna korespodencija između $\mathcal{M}$ i gustog podskupa $\mathcal{M}\Omega$ prostora $\mathcal{H}$. Ova korespodencija se može koristiti da bi se algebarske operacije sa $\mathcal{M}$ prenijele na $\mathcal{M}\Omega$.

U ovom poglavlju ćemo izučavati antilinearni operator S_0 na $\mathcal{M}\Omega$, koji nastaje iz operacije konjugacije na $\mathcal{M}$, kao i različite operatore povezane s operatorom S_0.

Definicija 3.7. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Zatvoren operator A na $\mathcal{H}$ nazivamo asociran (pridružen) algebri $\mathcal{M}$, i pišemo $A\eta\mathcal{M}$, ako je $\mathcal{M}'\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{D}(A)$ i $AA'\supseteq A'A$, za sve $A'\in\mathcal{M}'$.*

Odnos između elemenata algebre i neograničenih asociranih operatora daje sljedeća lema.

Lema 3.8. *Pretpostavimo da je A zatvoren operator asociran von Neumannovoj algebri $\mathcal{M}$. Ako je $A= U\,|A|$ polarna dekompozicija operatora A, tada U i spektralne projekcije od $|A|$ leže u $\mathcal{M}$.*

Dokaz. Neka je U' unitarni element u $\mathcal{M}'$. Tada je

$$U'UU'^*U'|A|U'^* = U'U\,|A|U'^* = U|A|.$$

Iz jedinstvenosti polarne dekompozicije slijedi

$$U'UU'^* = U \tag{*}$$

i

$$U'|A|\,U'^* = |A|. \tag{**}$$

Dakle, $U\in\mathcal{M}$.
Ako je

$$|A| = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$$

spektralna dekompozicija od |A|, tada je prema (**)

$$\int_0^\infty \lambda U' dE_\lambda U'^* = U' \int_0^\infty \lambda dE_\lambda U'^* = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda \,.$$

Iz jedinstvenosti spektralne dekompozicije od |A|, slijedi

$$U' E_\lambda U'^* = E_\lambda,$$

tj.

$$U' E_\lambda = E_\lambda U' \,,$$

što znači da E_λ komutira sa svakim unitarnim operatorom $U' \in \mathcal{M}'$. No, kako se svaki hermitski operator $A' \in \mathcal{M}'$ može izraziti preko nekog unitarnog operatora $U' \in \mathcal{M}'$, to i svaki hermitski operator iz $\mathcal{M}'$ komutira sa E_λ. Konačno, pošto je svaki operator iz $\mathcal{M}'$ linearna kombinacija dva hermitska operatora zaključujemo da E_λ komutira sa svim operatorima $A' \in \mathcal{M}'$. Znači,

$$E_\lambda \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M} \,, \quad \text{za sve } \lambda \geq 0. \; \square$$

Uzmimo vektor Ω koji je ciklički i separirajući za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ (takav vektor postoji prema Propoziciji 3.3.). Definišimo sada operatore S_0 i F_0 na sljedeći način:

$$S_0 A \Omega = A^* \Omega \,, \qquad A \in \mathcal{M},$$

$$F_0 A' \Omega = A'^* \Omega \,, \qquad A' \in \mathcal{M}'.$$

Ovi operatori su dobro definisani na svuda gustim (u $\mathcal{H}$) skupovima $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{M}\Omega$ i $\mathcal{D}(F_0) = \mathcal{M}'\Omega$. Oni su antilinearni, tj. za $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ i $A,B \in \mathcal{M}$ je

$$S_0(\lambda A + \mu B) = \bar{\lambda}\, S_0 A + \bar{\mu}\, S_0 B,$$

i slično za F_0.

Propozicija 3.9. *U skladu s prethodnim definicijama operatori S_0 i F_0 mogu zatvoriti i*

$$S_0^* = \overline{F}_0 \,, \quad F_0^* = \overline{S}_0,$$

gdje crta označava zatvorenje. Osim toga, za proizvoljno $\psi \in \mathcal{D}(\overline{S}_0)$ postoji zatvoren operator Q *na $\mathcal{H}$ takav da je*

$$Q\Omega = \psi \ , \quad Q^*\Omega = \overline{S}_0\,\psi$$

i Q *asociran algebri* $\mathcal{M}$. *Odgovarajući rezultat vrijedi i za* $\overline{F}_0$.

Dokaz. Za $A \in \mathcal{M}$ i $A' \in \mathcal{M}'$, imamo

$$(A'\Omega,\, S_0 A\Omega) = (A'\Omega,\, A^*\Omega) = (A\Omega,\, A'^*\Omega) = (A\Omega,\, F_0 A'\Omega).$$

Prema tome, $F_0 \subseteq S_0{}^*$. Dakle, operator $S_0{}^*$ je gusto definisan i S_0 se može zatvoriti. Analogno se zaključuje i da je $S_0 \subseteq F_0{}^*$.

Da bismo dokazali da je $S_0{}^*$ ustvari zatvorenje operatora F_0, izabraćemo najprije $\xi \in \mathcal{D}(S_0{}^*)$ i uzeti $\psi = S_0{}^*\xi$. Tada, za $A \in \mathcal{M}$, vrijedi

$$(A\Omega, \psi) = (A\Omega,\, S_0{}^*\xi) = (\xi,\, S_0 A\Omega) = (\xi,\, A^*\Omega).$$

Zatim ćemo definisati operatore Q_0 i $Q_0{}^+$ sa:

$$Q_0 : A\Omega \mapsto A\xi,$$

$$Q_0{}^+ : A\Omega \mapsto A\psi\,,$$

za sve $A \in \mathcal{M}$, redom.

Na osnovu prethodnih relacija tada dobijamo

$$(B\Omega\,, Q_0 A\Omega) = (B\Omega\,, A\xi) = (A^*B\Omega,\, \xi)$$

$$= (S_0(B^*A)\Omega,\, \xi) = (S_0{}^*\xi\, \Omega,\, B^*A\Omega)$$

$$= (\psi,\, B^*A\Omega) = (B\psi,\, A\Omega) = (Q_0{}^+ B\Omega\,, A\Omega)\,,$$

za sve $A, B \in \mathcal{M}$.
Dakle, $Q_0{}^+ \subseteq Q_0{}^*$ i Q_0 se može zatvoriti. Stavimo $Q' = \overline{Q}_0$.
Ako $A, B \in \mathcal{M}$, onda je

$$Q_0 AB\Omega = AB\xi = AQ_0 B\Omega\,.$$

Stoga, uzimajući zatvorenje, dobijamo

$$Q'A \supseteq AQ',$$

tj. operator A preslikava $\mathcal{D}(Q')$ u $\mathcal{D}(Q')$ i komutira sa Q' na $\mathcal{D}(Q')$. Dakle, ako je $Q' = U'|Q'|$ polarna dekompozicija operatora Q', onda, prema Lemi 3.8, $U' \in \mathcal{M}'$ i sve spektralne projekcije od $|Q'|$ leže u $\mathcal{M}'$.

Neka je $E_n' \in \mathcal{M}'$ spektralna projekcija od $|Q'|$ koja odgovara intervalu $[0, n]$ i

$$Q_n' = U' E_n' |Q'|.$$

Tada $Q_n' \in \mathcal{M}'$ i

$$\begin{aligned} Q_n'\Omega &= U' E_n'|Q'|\Omega = U' E_n' U'^* U'|Q'|\Omega \\ &= U' E_n' U'^* Q_0 \Omega = U' E_n' U'^* \xi. \end{aligned}$$

Uz to vrijedi

$$Q_n'^*\Omega = E_n'|Q'|U'^*\Omega = E_n' Q_0^+ \Omega = E_n'\psi.$$

Kako je $U' E_n' U'^* \xi = Q_n'\Omega$ i $Q_n' = U' E_n'|Q'| \in \mathcal{M}'$, to

$$U' E_n' U'^* \xi \in \mathcal{D}(F_0).$$

Prema tek dokazanom i definiciji operatora F_0, dobijamo

$$F_0(U' E_n' U'^* \xi) = F_0(Q_n'\Omega) = Q_n'^*\Omega = E_n'\psi.$$

Sada, E_n' konvergira jako ka $\boldsymbol{I}$, a $U'U'^*$ je projektor čiji je rang jednak rangu operatora Q'. Ovaj skup sadrži $\xi = \boldsymbol{I}\xi$. Dakle, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{F_0})$ i $\overline{F_0}\xi = \psi = S_0^*\xi$.

Na sličan način bi se dobilo $S_0^* \subseteq \overline{F_0} \subseteq S_0^*$ i $\overline{F_0} = S_0^*$.
Mijenjajući uloge operatorima S_0 i F_0 zaključujemo $\overline{S_0} = F_0^*$. □

Definicija 3.10. *Označimo sa S i F zatvorenja operatora S_0 i F_0 respektivno, tj. stavimo*

$$S = \overline{S_0}\ , \qquad F = \overline{F_0}.$$

Neka je Δ jedinstven, pozitivan, hermitski operator i neka je J jedinstven antiunitaran operator koji se javlja u polarnoj dekompoziciji

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$$

operatora S. Operator Δ nazivamo modularnim operatorom pridruženim paru $\{\mathcal{M}, \Omega\}$, a J modularnom konjugacijom.

Iz ove definicije i prethodne propozicije zaključujemo da je $S = F_0{*}$ i $F = S_0{*}$.
Između operatora F, S, J i Δ postoje relativno direktne veze što se vidi iz sljedeće propozicije.

Propozicija 3.11. *Operatori F, S, J i Δ sljedeće relacije:*

$$\Delta = FS\,, \qquad \Delta^{-1} = SF,$$

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}}\,, \qquad F = J\Delta^{-\frac{1}{2}},$$

$$J = J^*\,, \qquad J^2 = \boldsymbol{I}\,,$$

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} = J\Delta^{\frac{1}{2}}J\,.$$

Dokaz. Prema Definiciji 3.10. i Propoziciji 3.9, je $\Delta = S^*S = FS$ i $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$. Kako je $S_0 = S_0^{-1}$, uzimajući zatvorenje dobićemo $S = S^{-1}$, na osnovu čega dobijamo

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} = \mathrm{S} = \mathrm{S}^{-1} = (J\Delta^{\frac{1}{2}})^{-1} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J^*,$$

tako da je $J^2\Delta^{\frac{1}{2}} = J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^*$.
Ako stavimo $\Delta_1 = J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^*$, onda je $\Delta_1 \geq 0$, pa jednakost $J^2\Delta^{\frac{1}{2}} = J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^*$ možemo pisati u obliku

$$J^2\Delta^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{I}\cdot\Delta_1 \qquad (*)$$

S druge strane, za sve $x,y \in \mathcal{H}$, zbog antiunitarnosti operatora J, imamo

$$(J^2x, J^2y) = (J(Jx), J(Jy)) = (Jy, Jx) = (x, y).$$

Znači, operator J^2 je unitaran. Sada iz relacije (*) vidimo da su $J^2\Delta^{\frac{1}{2}}$ i $\boldsymbol{I}\cdot\Delta_1(= J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^*)$ dvije polarne dekompozicije jednog te istog operatora. Jedinstvenost polarne dekompozicije sada daje

$$J^2 = \boldsymbol{I}\,, \qquad \Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta_1 = J\Delta^{-\frac{1}{2}}J^*$$

i zatim

$$J^* = J\,, \qquad \Delta^{-\frac{1}{2}} = J\Delta^{\frac{1}{2}}J.$$

Odavde, dalje, slijedi

$$F = S^* = (\Delta^{-\frac{1}{2}}J)^* = J\Delta^{-\frac{1}{2}}$$

i

$$SF = \Delta^{-\frac{1}{2}}JJ\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{-1}\ . \ \square$$

Dokažimo da vrijede jednakosti $S = F = J$ i $\Delta = \boldsymbol{I}$.

U slučaju kad je $\mathcal{M}$ abelova algebra, očigledno je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$, pa iz definicija operatora S_0 i F_0 slijedi da se oni na skupu $\mathcal{M}\Omega$ podudaraju.
Znači, $\mathcal{D}_{S_\circ} = \mathcal{M}\Omega \subseteq \mathcal{M}'\Omega = \mathcal{D}_{F_\circ}$. Ovo i $S_0 = F_0$ na $\mathcal{M}\Omega = \mathcal{D}_{S_\circ}$ daje $S_0 \subseteq F_0$.

Zatvorenje $\overline{S}_0$ operatora S_0 se sastoji od svih $x_0 \in \mathcal{H}$ za koje postoji niz $A_n\Omega \in \mathcal{D}_{S_\circ}$ takav da

$$A_n\Omega \to x_0$$

i

$$S_0(A_n\Omega) = A_n^*\Omega \to y_0$$

(pri čemu je $\overline{S}_0 x_0 = y_0 \in \mathcal{H}$).

Zatvorenje $\overline{F_0}$ operatora F_0 se sastoji od onih $x_0' \in \mathcal{H}$ za koje postoji niz $A_n'\Omega \in \mathcal{D}_{F_\circ}$ takav da vrijedi

$$A_n'\Omega \to x_0'$$

i

$$A_n'^*\Omega \to y_0$$

(pri čemu je $\overline{F_0} x_0' = y_0'$).

Pokažimo da ovdje umjesto $A_n' \in \mathcal{M}'$ možemo uzeti $A_n \in \mathcal{M}$. Naime, za svako $n = 1,2,...$ postoji operator $A_n\Omega$ za koji je

$$\left\| A_n'\ \Omega - A_n\Omega \right\| < \frac{1}{n},$$

jer je skup $\mathcal{M}\Omega$ gust u $\mathcal{H}$. Tada, za svaki operator $B \in \mathcal{M}$, imamo

$$(B\Omega, (A_n'^* - A_n^*)\Omega) = ((A_n' - A_n)B\Omega, \Omega) = (B(A_n' - A_n)\Omega, \Omega)$$
$$= ((A_n' - A_n)\Omega, B^*\Omega).$$

Dakle,

$$|(B\Omega,\ A_n'^*\Omega - A_n^*\Omega)| \leq \|A_n'\Omega - A_n\Omega\|\ \|B^*\Omega\| \leq \frac{1}{n}\ \|B^*\Omega\|, \quad \forall B \in \mathcal{M}.$$

Odavde dalje slijedi

$$\frac{|(B\Omega, A_n'^*\Omega - A_n^*\Omega)|}{\|B\Omega\|} \leq \frac{1}{n}\frac{\|B^*\Omega\|}{\|B\Omega\|} \ . \qquad (\lozenge)$$

Kako je

$$\|B^*\Omega\|^2 = (B^*\Omega,\ B^*\Omega) = (BB^*\Omega,\ \Omega)$$

i

$$\|B\Omega\|^2 = (B\Omega,\ B\Omega) = (B^*B\Omega,\ \Omega) = (\ BB^*\Omega,\ \Omega),$$

vidimo da je

$$\|B^*\Omega\| = \|B\Omega\|.$$

Iz ($\lozenge$), sada, dobijamo

$$\|A_n'^*\Omega - A_n^*\Omega\| = \sup \frac{|(B\Omega, A_n'^*\Omega - A_n^*\Omega)|}{\|B\Omega\|} \leq \frac{1}{n}.$$

Prema tome,

$$A_n'^*\Omega - A_n^*\Omega \to 0.$$

Sada

$$A_n\Omega \to x_0',$$

$$A_n^*\Omega \to y_0', \quad A_n \in \mathcal{M}, \ \text{tj.}\ A_n\Omega \in \mathcal{M}\Omega.$$

Možemo pisati i

$$A_n\Omega \to x_0',$$

$$F_0\, A_n\Omega = S_0 A_n\Omega \to y_0',$$

što znači da $x_0 \in \mathcal{D}_{F_\circ}$ i da je $\overline{F}_0 x_0' = y_0'$, ali i $x_0' \in \mathcal{D}_{S_\circ}$ i $\overline{S}_0 x_0' = y_0'$. Prema tome, za svako $x_0 \in \mathcal{D}_{F_\circ}$ slijedi $x_0' \in \mathcal{D}_{S_\circ}$ i $\overline{F}_0 x_0' = \overline{S}_0 x_0'$, što znači $\overline{F}_0 \subseteq \overline{S}_0$. Kako iz $S_0 \subseteq F_0$ slijedi i $\overline{S}_0 \subseteq \overline{F}_0$, to je $\overline{S}_0 = \overline{F}_0$, tj. $S = F$.

Sada iz $\Delta = FS$ i $\Delta^{-1} = SF$, slijedi

$$\Delta = \Delta^{-1}, \ tj. \quad \Delta^2 = \boldsymbol{I}.$$

Ovo znači da pozitivan operator Δ^2 ima pozitivne druge korijene Δ i $\boldsymbol{I}$. Kako je pozitivan drugi korijen iz nekog pozitivnog operatora jedinstven, dobijamo $\Delta = \boldsymbol{I}$.

Sad iz $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ slijedi $S = J$ i $F = J$.

Koristeći jednakosti $S = F = J$ dobijamo $J\mathcal{M}J \subseteq \mathcal{M}'$ i $J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M}$, a odavde i iz $J^2 = \boldsymbol{I}$, dobijamo $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$.

Iz navedenih primjera se ne može steći direktan uvid u moguća svojstva modularnog operatora Δ. Do strukturnih karakteristika operatora Δ dovešće nas sljedeće razmatranje.

Posmatrajmo djelovanje operatora SAS, gdje je $A \in \mathcal{M}$. Za svaki par $B, C \in \mathcal{M}$ imamo

$$(SAS)BC\Omega = SAC^*B^*\Omega = BCA^*\Omega$$

i

$$B(SAS)C\Omega = BSAC^*\Omega = BCA^*\Omega.$$

Prema tome, operator SAS je asociran algebri $\mathcal{M}'$.

Pretpostavimo da je operator Δ ograničen i, prema tome, $\Delta^{-1} = J\Delta J$ i S i F su ograničeni. Prema prethodnom je

$$S\mathcal{M}S \subseteq \mathcal{M}' \ , \quad F\mathcal{M}'F \subseteq \mathcal{M}.$$

Tako dobijamo da je

$$\Delta\mathcal{M}\Delta^{-1} = \Delta^{\frac{1}{2}} JJ \Delta^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} \ \Delta^{-\frac{1}{2}} JJ \Delta^{-\frac{1}{2}} = FS\mathcal{M}\, SF \subseteq F\mathcal{M}'\, F \subseteq \mathcal{M},$$

i postupkom iteracije

$$\Delta^n \ \mathcal{M}\Delta^{-n} \subseteq \mathcal{M}, \ \text{za} \ n = 0,1,2...$$

Posmatrajmo sada, za $A \in \mathcal{M}$, $A' \in \mathcal{M}'$, $\varphi, \ \psi \in \mathcal{H}$, cijelu analitičku funkciju

$$f(z) = \|\Delta\|^{-2z} (\varphi, [\Delta^z A \Delta^{-z}, A']\, \psi).$$

Tada je $f(z) = 0$ za $z = 0,1,2,...$

Osim toga, $|f(z)| = \mathcal{O}\big(\|\Delta\|^{-2\,\mathrm{Re}\, z} \ (\|\Delta\|^{\mathrm{Re}\, z} \ )^2\big) = \mathcal{O}(1)$ za $\mathrm{Re}z \geq 0$.

Da bi se uvjerili u prethodnu procjenu, dokažimo prvo da vrijedi

$$\|\Delta^{-1}\| = \|J\Delta J\| = \|\Delta\|.$$

Naime, za svako $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|=1$, zbog antiunitarnosti operatora J, imamo
$(\Delta^{-1}x, \Delta^{-1}x) = (J\Delta Jx, J\Delta Jx) = (J(\Delta Jx), J(\Delta Jx)) = (\Delta Jx, \Delta Jx) = \|\Delta(Jx)\|^2$.

Odavde slijedi

$$\|\Delta^{-1}\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\|\Delta^{-1}x\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\|\Delta(Jx)\|^2.$$

Zbog antiunitarnosti operatora J je $\|Jx\|=1$ ako i samo ako je $\|x\|=1$. Osim toga, kad x prolazi cijelim $\mathcal{H}$, tada i Jx prolazi cijelim $\mathcal{H}$. Dakle,

$$\|\Delta^{-1}\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\|\Delta(Jx)\|^2 = \sup_{\|y\|=1}\|\Delta y\|^2 = \|\Delta\|.$$

Sada imamo

$$|f(z)| = \|\Delta\|^{-2z} |(\varphi, [\Delta^z A\Delta^{-z}, A']\psi)| \leq \|\Delta\|^{-2\operatorname{Re} z} \;\|\varphi\|\; \|\Delta^z A\Delta^{-z}\|\; \|\psi\|$$

$$\leq \|\Delta^z\|\; \|A\|\; \|\Delta^{-z}\|\; \|\varphi\|\; \|\psi\|\; \|\Delta\|^{-2\operatorname{Re} z}.$$

Iz jednakosti

$$\Delta^z x = \int \lambda^z dE_\lambda x$$

se dolazi do zaključka da je

$$\|\Delta^z\| \leq \|\Delta\|^{\operatorname{Re} z}.$$

Kako je $\|\Delta^{-1}\| = \|\Delta\|$, to je $\|\Delta^{-z}\| \leq \|\Delta\|^{\operatorname{Re} z}$, pa dobijamo

$$|f(z)| \leq \|A\|\; \|\varphi\|\; \|\psi\|, \text{ za sve } z \in \mathbb{C}.$$

Funkcija $f(z)$ je cijela funkcija koja je zbog $|f(z)| = \mathcal{O}(1)$ ograničena na $\mathbb{C}$.
Prema Liouvilleovoj teoremi $f(z)$ je konstantna na $\mathbb{C}$, tj.

$$f(z) = c\,,\quad c = \text{const.}$$

No,

$$f(0) = (\varphi, [A,A']\psi) = 0,$$

jer je $[A, A'] = AA' - A'A = 0$, zbog $A \in \mathcal{M}$ i $A' \in \mathcal{M}'$.
Znači, $c = 0$, tako da je $f(z) \equiv 0$.

Iz posljednjeg identiteta slijedi $[\Delta^z A \Delta^{-z}, A'] = 0$, $\forall A \in \mathcal{M}$ i $A' \in \mathcal{M}'$, što znači da za svako $A \in \mathcal{M}$, $\Delta^z A \Delta^{-z}$ komutira sa svim operatorima $A' \in \mathcal{M}'$, tj.

$$\Delta^z A \Delta^{-z} \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M}, \text{ za sve } A \in \mathcal{M},$$

tj.

$$\Delta^z \mathcal{M} \Delta^{-z} \subseteq \mathcal{M}.$$

Kako je $\mathcal{M} = \Delta^z (\Delta^{-z} M \Delta^z) \Delta^{-z} \subseteq \Delta^z \mathcal{M} \Delta^{-z}$, to je

$$\Delta^z \mathcal{M} \Delta^{-z} = \mathcal{M} \ , \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dalje, vrijedi

$$J\mathcal{M}J = J\Delta^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} \ \Delta^{-\frac{1}{2}} J = S\mathcal{M}S \subseteq \mathcal{M}',$$

i analogno

$$J\mathcal{M}'J = J\Delta^{-\frac{1}{2}} \mathcal{M}' \Delta^{\frac{1}{2}} J = F\mathcal{M}'F \subseteq \mathcal{M}.$$

Dakle,

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'.$$

Glavni rezultat teorije Tomita – Takesaki proširuje ove relacije na opštiji slučaj kada Δ nije nužno ograničen operator, tj. kada je

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}' \quad \text{i} \quad \Delta^{it} \mathcal{M} \Delta^{-it} = \mathcal{M} \qquad \text{za sve } t \in \mathbb{R}.$$

Prije nego što formulišemo teoremu Tomita – Takesaki, dokazaćemo dva “pomoćna” rezultata u vidu dvije leme.

Pretpostavimo da u slučaju traga a priori znamo da vrijedi

$$\mathcal{M}\Omega = \mathcal{M}'\Omega.$$

Tako za proizvoljno $A \in \mathcal{M}$ postoji neko $A' \in \mathcal{M}'$ za koje je $A^*\Omega = A'\Omega$. Relaciju $JAJ = A'$ dobijamo iz

$$JAJB\Omega = JAB^*\Omega = BA^*\Omega = BA'\Omega = A'B\Omega, \quad \text{za sve } B \in \mathcal{M}.$$

Dakle, $J\mathcal{M}J \subseteq \mathcal{M}'$. Analogno je $J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M}$, tj. $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$.

Sljedeća lema demonstrira rezultat analogan $\mathcal{M}\Omega = \mathcal{M}'\Omega$, gdje se, u općem slučaju, javlja rezolventa modularnog operatora koja modificira jednakost.

Lema 3.12. *Ako $\lambda \in \mathbb{C}$, $-\lambda \notin \mathbb{R}_+$ i $A' \in \mathcal{M}'$, tada postoji operator $A_\lambda \in \mathcal{M}$ takav da je*

$$A_\lambda^*\Omega = (\Delta + \lambda \boldsymbol{I})^{-1} A'\Omega.$$

Za A_λ vrijedi sljedeća procjena:

$$\|A_\lambda\| \leq (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-\frac{1}{2}} \|A'\| .$$

Dokaz. Dokaz se zasniva na sljedećoj jednostavnoj činjenici.
Primjedba. *Neka su $a, b, K \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ brojevi takvi da je*

$$|a + \lambda b| \leq K.$$

Tada je

$$(ab)^{\frac{1}{2}} \leq (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-\frac{1}{2}} \cdot K .$$

Tačnost navedene nejednakosti se provjerava na sljedeći način:

$$K^2 \geq |a + \lambda b|^2 - (a - |\lambda| b)^2 = (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})\, ab.$$

Neka je sada $\xi = (\Delta + \lambda \boldsymbol{I})^{-1} A'\Omega$ i neka je $B' \in \mathcal{M}'$ proizvoljan element.

Kako je

$$(\Delta + \bar{\lambda}\mathbf{I})^{-1} B'^* B'\xi \in \mathcal{D}(\Delta) \subseteq \mathcal{D}(S),$$

to, prema Propoziciji 3.9, postoji zatvoreni operator B asociran algebri $\mathcal{M}$ takav da je

$$\Omega \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(B^*)$$

i

$$B\Omega = (\Delta + \bar{\lambda}\mathbf{I})^{-1} B'^* B'\xi.$$

Znači,

$$B'^*B'\xi = (\Delta + \bar{\lambda}\mathbf{I})\,B\Omega\,.$$

Neka je sada $B = U|B|$ polarna dekompozicija operatora B. Tada je

$$|\lambda(\Omega,\ |B|\Omega) + (\Omega,\ U|B|U^*\Omega)| = |\lambda\,(B\Omega,\ U\Omega) + (U^*\Omega,\ B^*\Omega)|$$

$$= |\lambda\,(B\Omega,\ U\Omega) + (\Delta B\Omega,\ U\Omega)| = |((\Delta + \bar{\lambda}\mathbf{I})\,B\Omega,\ U\Omega)|$$

$$= |(B'^*B'\xi,\ U\Omega)| = |(B'\xi,\ UB'\Omega)| \le \|B'\xi\|\|B'\Omega\|\,.$$

Ako stavimo

$$a = \left\||B|^{\frac{1}{2}}U^*\Omega\right\|^2 = (|B|^{\frac{1}{2}}U^*\Omega,\ |B|^{\frac{1}{2}}U^*\Omega)$$

$$= (U^*\Omega,\ |B|U^*\Omega) = (\Omega, U|B|U^*\Omega)$$

i

$$b = \left\||B|^{\frac{1}{2}}\Omega\right\|^2 = (|B|^{\frac{1}{2}}\Omega,\ |B|^{\frac{1}{2}}\Omega) = (\Omega,\ |B|\Omega),$$

onda prethodnu nejednakost možemo napisati u obliku

$$|a + \lambda b| \le \|B'\xi\|\|B'\Omega\|,$$

tj. u obliku

$$|a + \lambda b| \le K,\ \text{ gdje je } K = \|B'\xi\|\|B'\Omega\|\,.$$

Na osnovu ovoga iz Primjedbe slijedi

$$\left\||B|^{\frac{1}{2}}\Omega\right\| \cdot \left\||B|^{\frac{1}{2}}U^*\Omega\right\| \le (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-\frac{1}{2}}\,\|B'\xi\|\|B'\Omega\|\,.$$

S druge strane je

$$\|B'\xi\|^2 = (B'^*B'\xi,\ \xi) = ((\Delta + \bar{\lambda}\mathbf{I})\,B\Omega,\ (\Delta + \lambda\mathbf{I})^{-1}A'\Omega)$$

$$= (B\Omega,\ A'\Omega) = (|B|^{\frac{1}{2}}\Omega,\ A'|B|^{\frac{1}{2}}U^*\Omega)$$

$$\le \|A'\| \cdot \left\||B|^{\frac{1}{2}}\Omega\right\| \cdot \left\||B|^{\frac{1}{2}}U^*\Omega\right\|$$

$$\le (2|\lambda| + \lambda + \bar{\lambda})^{-\frac{1}{2}}\,\|A'\|\,\|B'\xi\|\|B'\Omega\|\,.$$

Ako obje strane gornje nejednakosti podijelimo sa

$$\|B'\xi\| = \|B'(\Delta+\lambda\mathbf{I})^{-1}A'\Omega\|$$

dobijamo procjenu

$$\|B'(\Delta+\lambda\mathbf{I})^{-1}A'\Omega\| \leq (2|\lambda|+\lambda+\overline{\lambda})^{-\frac{1}{2}}\,\|A'\|\,\|B'\Omega\|\ .$$

To znači da je preslikavanje definisano na $\mathcal{M}'\Omega$ sa

$$B'\Omega \mapsto B'(\Delta+\lambda\mathbf{I})^{-1}A'\Omega\ ,$$

ograničen, gusto definisan operator s normom koja je manja ili jednaka od

$$(2|\lambda|+\lambda+\overline{\lambda})^{-\frac{1}{2}}\,\|A'\|.$$

Označimo li zatvorenje ovog operatora sa $A_\lambda{}^*$, imamo $A_\lambda{}^* \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ i

$$A_\lambda{}^*\Omega = (\Delta+\lambda\mathbf{I})^{-1}A'\Omega.\ \square$$

Druga značajna lema sada eksplicite povezuje elemente $A_\lambda \in \mathcal{M}$ i $A' \in \mathcal{M}'$ iz Leme 3.12.

Lema 3.13. *Neka $\lambda \in \mathbb{C}$, $-\lambda \notin \mathbb{R}_+$ i $A' \in \mathcal{M}'$ i neka je $A_\lambda \in \mathcal{M}$ element iz $\mathcal{M}$ takav da je*

$$A_\lambda{}^*\Omega = (\Delta+\mathbf{I}\lambda)^{-1}A'\Omega$$

(egzistencija A_λ slijedi iz prethodna leme). Tada je

$$JA'J = \Delta^{-\frac{1}{2}}A_\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + \overline{\lambda}\Delta^{\frac{1}{2}}A_\lambda\Delta^{-\frac{1}{2}}$$

(što posmatramo kao relaciju između bilinearnih formi na $\mathcal{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$).

Dokaz. Neka su B', C' proizvoljni elementi iz $\mathcal{M}'$ i neka su $B, C \in \mathcal{M}$ takvi da je

$$B^*\Omega = (\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}B'\Omega,$$
$$C^*\Omega = (\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}C'\Omega.$$

Kako je $(\Delta+\lambda\boldsymbol{I})A_\lambda{}^*\Omega = A'\Omega$, dobijamo

$$(\Delta A_\lambda{}^*\Omega, B^*C\Omega) + \overline{\lambda}\,(A_\lambda{}^*\Omega, B^*C\Omega) = (A'\Omega, B^*C\Omega).$$

Posmatrajmo pojedinačno svaki član prethodne jednakosti. Za prvi član imamo

$$(\Delta A_\lambda{}^*\Omega,\ B^*C\Omega) = (FSA_\lambda{}^*\Omega,\ B^*C\Omega)$$
$$= (SB^*C\Omega,\ SA_\lambda{}^*\Omega) = (C^*B\Omega,\ A_\lambda\Omega) =$$
$$= (SB^*\Omega,\ SA_\lambda{}^*C^*\Omega) = (A_\lambda{}^*C^*\Omega,\ \Delta B^*\Omega)$$
$$= (C'\Omega,\ (\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}A_\lambda\Delta(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}B'\Omega)\ .$$

Dijeljenjem drugog člana sa $\overline{\lambda}$, dobićemo

$$(A_\lambda{}^*\Omega,\ B^*C\Omega) = (BA_\lambda{}^*\Omega,\ C\Omega) = (SA_\lambda B^*\Omega,\ SC^*\Omega) = (\Delta C^*\Omega,\ A_\lambda B^*\Omega)$$
$$= (C'\Omega,\ (\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}\Delta A_\lambda(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}B'\Omega)\ .$$

Zadnji član je jednak

$$(A'\Omega,\ B^*C\Omega) = (A'B\Omega,\ C\Omega) = (A'SB^*\Omega,\ SC^*\Omega) = (C^*\Omega,\ FA'SB^*\Omega)$$
$$= (C'\Omega,\ (\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}\Delta^{\frac{1}{2}}JA'J\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}B'\Omega)\ .$$

S obzirom da je skup $\mathcal{M}'\Omega$ gust u $\mathcal{H}$, nalazimo da za ograničene operatore vrijedi sljedeća jednakost:

$$(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}A_\lambda\Delta(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1} + \overline{\lambda}\,(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}\Delta A_\lambda(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1} = (\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}\Delta^{\frac{1}{2}}JA'J\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta+\boldsymbol{I})^{-1}\ .$$

Množenjem s lijeve i s desne strane s $(\Delta+\boldsymbol{I})\,\Delta^{-\frac{1}{2}}$ dobijamo

$$\Delta^{-\frac{1}{2}}\mathrm{A}_\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + \overline{\lambda}\,\Delta^{\frac{1}{2}}\mathrm{A}_\lambda\Delta^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{JA'J}\ ,$$

što je traženi rezultat. □

Iskoristimo rezultat prethodne leme kako bi $JA'J$ identifikovali kao element iz $\mathcal{M}$.

Stavimo $D^{\frac{1}{2}}(B) = \Delta^{\frac{1}{2}}B\Delta^{-\frac{1}{2}}$. Tada jednakost iz Leme 3.13. prima oblik

$$JA'J = (D^{-\frac{1}{2}} + \overline{\lambda}D^{\frac{1}{2}})(A_\lambda)\ .$$

Za $\lambda > 0$, primjena Fourierovog integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\frac{e^{ipt}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} = \frac{1}{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}$$

će nas dovesti do inverzne relacije

$$A_\lambda = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} D^{it}(JA'J)\,, \tag{\#}$$

gdje je $D^{it}(B) = \Delta^{it} B \Delta^{-it}$.

Glavni zadatak u dokazu naredne teoreme biće potvrda ove relacije inverzije, jer se tada pomoću Fourierove analize pokazuje da $A_\lambda \in \mathcal{M}$ implicira $D^{it}(JA'J) \in \mathcal{M}$. Ovim smo u glavnim crtama izložili dokaz ranije najavljenog glavnog rezultata.

Teorema 3.14. ***(Teorema Tomita-Takesaki)*** *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra sa cikličkim i separirajućim vektorom Ω i neka su Δ odgovarajući modularni operator, a J odgovarajuća modularna konjugacija. Tada vrijedi*

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'\,,$$

i uz to

$$\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}\,, \quad \text{za sve } t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Ako je $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ i E_λ spektralna dekompozicija jedinice, koja odgovara operatoru Δ, onda je

$$\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x \qquad (x \in \mathcal{D}(\Delta))$$

i

$$\Delta^{it} x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{it} dE_\lambda x \ .$$

Otuda je

$$\left\|\Delta^{it} x\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\ln\lambda} \cdot e^{-it\ln\lambda} d(E_\lambda x, x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot d(E_\lambda x, x) = (\int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda x, x) = (x,x) = \|x\|^2 .$$

Znači

$$\left\|\Delta^{it} x\right\| = \|x\| \qquad (\forall x \in \mathcal{H},\ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ i } \ \left\|\Delta^{it}\right\| = 1) \tag{*}$$

pa je Δ^{it} unitarna grupa. Iz ovog slijedi

$$|(\psi, \Delta^{it} B \Delta^{-it} \varphi)| \le \|\psi\| \cdot \|\Delta^{it} B \Delta^{-it} \varphi\| \overset{(*)}{=} \|\psi\| \cdot \|B \Delta^{-it} \varphi\| \le \|\psi\| \cdot \|B\| \cdot \|\Delta^{-it} \varphi\|$$
$$\overset{(*)}{=} \|\psi\| \cdot \|B\| \cdot \|\varphi\| .$$

Možemo reći da su funkcije $t \mapsto (\psi, \Delta^{it} B \Delta^{-it} \varphi)$; $t \in \mathbb{R}$, neprekidne i ograničene za sve $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Na taj način, integracijom bilinearnih formi možemo, za svako $\lambda > 0$, definisati transformaciju $I_\lambda(B)$, operatora B, sa

$$I_\lambda(B) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} B \Delta^{-it} .$$

Uzmimo sada $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$ i posmatrajmo funkciju

$$f(\lambda) = (\Delta^{\frac{1}{2}}\psi, I_\lambda(B)\Delta^{\frac{1}{2}}\varphi) + \lambda(\Delta^{\frac{1}{2}}\psi, I_\lambda(B)\Delta^{-\frac{1}{2}}\varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\lambda^{it}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left\{ \lambda^{-\frac{1}{2}} (\Delta^{-\frac{1}{2}-it}\psi, B\Delta^{\frac{1}{2}-it}\varphi) + \lambda^{\frac{1}{2}} (\Delta^{\frac{1}{2}-it}\psi, B\Delta^{-\frac{1}{2}-it}\varphi) \right\} .$$

Koristeći spektralnu dekompoziciju modularnog operatora Δ

$$\Delta = \int \mu dE_\Delta(\mu) ,$$

nalazimo

$$f(\lambda) = \int d^2 (E_\Delta(\mu)\psi, BE_\Delta(\rho)\varphi) \left\{ \left(\frac{\rho}{\mu\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\mu\lambda}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left(\frac{\mu\lambda}{\rho}\right)^{it}$$

$$= \int d^2 (E_\Delta(\mu)\psi, BE_\Delta(\rho)\varphi) = (\psi, B\varphi) ,$$

gdje smo, u prvom koraku, iskoristili Fourierovu relaciju (#), navedenu prije teoreme. Otuda, kao jednakost bilinearnih formi na $\mathcal{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{D}(\Delta^{-\frac{1}{2}})$, dobijamo

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} I_\lambda(B) \Delta^{\frac{1}{2}} + \lambda \Delta^{\frac{1}{2}} I_\lambda(B) \Delta^{-\frac{1}{2}} = B.$$

Iz definicije operatora $D^{\frac{1}{2}}$ i I_λ slijedi da $(D^{-\frac{1}{2}} + \lambda D^{\frac{1}{2}})$ i I_λ komutiraju na prostoru $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, dakle, iz posljednje jednakosti slijedi

$$I_\lambda = (D^{-\frac{1}{2}} + \lambda D^{\frac{1}{2}})^{-1} .$$

Upoređivanjem ovih rezultata sa Lemom 3.13, dobijamo

$$A_\lambda = I_\lambda (JA'J) .$$

Zbog $A_\lambda \in \mathcal{M}$, za $B' \in \mathcal{M}'$, imamo

$$(\psi, [B', I_\lambda(JA'J)]\varphi) = 0 .$$

Stavimo $\lambda = e^p$ i iskoristimo definiciju operatora I_λ. Zaključujemo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{ipt}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} (\psi, [B', \Delta^{it} JA'J\Delta^{-it}]\varphi) = 0 , \quad \text{za sve } p \in \mathbb{R}.$$

Odavde, prema osobinama Fourierove transformacije, slijedi da je

$$\frac{1}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} (\psi, [B', \Delta^{it} JA'J\Delta^{-it}]\varphi) = 0 , \quad \forall t \in \mathbb{R} , \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} .$$

Dalje slijedi

$$[B', \Delta^{it} JA'J\Delta^{-it}] = 0 , \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

No, ovo vrijedi za sve $B' \in \mathcal{M}'$, pa imamo

$$\Delta^{it} JA'J\Delta^{-it} \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M}. \tag{**}$$

Za $t = 0$, odavde dobijamo

$$J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M} .$$

Prema Propoziciji 3.11, konjugacija para $(\mathcal{M}', \Omega)$ jednaka je konjugaciji para $(\mathcal{M}, \Omega)$. Otuda istim rezonovanjem dobijamo

$$J\mathcal{M}J \subseteq \mathcal{M}' .$$

Koristeći $J^2 = \boldsymbol{I}$, nalazimo $\mathcal{M} \subseteq J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M}$, što nam daje osnovni rezultat

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}' .$$

Kako je i $J\mathcal{M}'J = \mathcal{M}$, zaključujemo da svaki element $A \in \mathcal{M}$ ima oblik $A = JA'J$, gdje $A' \in \mathcal{M}'$. Otuda, koristeći relaciju (**) dobijamo

$$\Delta^{it} A\Delta^{-it} \in \mathcal{M}.$$

Time je teorema dokazana. □

Definicija 3.15. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra, ω vjerno, normalno stanje na $\mathcal{M}$, $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ odgovarajuća ciklička reprezentacija i Δ modularni operator asociran paru $(\pi_\omega(\mathcal{M}), \Omega_\omega)$. Teorema Tomita-Takesaki potvrđuje egzistenciju σ-slabo neprekidne jednoparametarske grupe $t \mapsto \sigma_t^\omega$, *-automorfizama algebre $\mathcal{M}$ definisane sa*

$$\sigma_t^\omega(A) = \bar{\pi}_\omega^{-1}(\Delta^{it}\pi_\omega(A)\Delta^{-it}) .$$

Grupu $t \mapsto \sigma_t^\omega$ nazivamo modularnom grupom automorfizama asociranoj paru $(\mathcal{M}, \omega)$.

Modularna grupa automorfizama je jedan od najznačajnijih elemenata u analizi von Neumannovih algebri. Od značaja je također njena primjena u kvantnoj statističkoj mehanici, gdje najveću važnost ima modularni uslov

$$\begin{aligned}(\Delta^{\frac{1}{2}}\pi_\omega(A)\Omega_\omega, \Delta^{\frac{1}{2}}\pi_\omega(B)\Omega_\omega) &= (J\pi_\omega(A^*)\Omega_\omega, J\pi_\omega(B^*)\Omega_\omega)\\ &= (\pi_\omega(B^*)\Omega_\omega, \pi_\omega(A^*)\Omega_\omega) .\end{aligned}$$

Primjetimo da pomoću modularne grupe izračunate u imaginarnoj tački $t = \frac{i}{2}$ ovaj uslov dobija oblik

$$\omega(\sigma_{\frac{i}{2}}(A)\sigma_{-\frac{i}{2}}(B)) = \omega(BA) .$$

Primjer 3.16. Ako je $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, gdje je prostor $\mathcal{H}$ separabilan, tada svako normalno stanje ω ima oblik

$$\omega(A) = Tr(\rho A),$$

i ω je vjerno stanje ako i samo ako je ρ invertibilan (Primjer 3.5.). U ovom slučaju modularna grupa je data sa $\sigma_t(A) = \rho^{it} A \rho^{-it}$.
Modularni uslov je zadovoljen jer je

$$\omega(BA) = Tr(\rho BA) = Tr(\rho(\rho^{-\frac{1}{2}}A\rho^{\frac{1}{2}})(\rho^{\frac{1}{2}}B\rho^{-\frac{1}{2}})) .$$

3.3. INTEGRACIJA I ANALITIČKI ELEMENTI JEDNOPARAMETARSKIH GRUPA IZOMETRIJA NA BANACHOVIM PROSTORIMA

U ovom poglavlju su dati neki opći rezultati o jednoparametarskim grupama. Posmatrajmo kompleksan Banachov prostor X i zatvoren u normi podprostor F duala X^* prostora X tako da vrijedi $F = X^*$ ili $X = F^*$. U slučaju $X = F^*$ pisaćemo $F = X_*$.

Neka je $\sigma(X,F)$ lokalno konveksna topologija na X inducirana funkcionalima iz F.

Definicija 3.17. *Jednoparametarsku familiju* $t \mapsto \tau_t$; $t \in \mathbb{R}$, *ograničenih, linearnih preslikavanja prostora X na samog sebe nazivamo* $\sigma(X,F)$*-neprekidna grupa izometrija prostora X, ako vrijedi:*

(1) $\tau_{t_1+t_2} = \tau_{t_1}\tau_{t_2}$; $t_1, t_2 \in 3$ *i* $\tau_0 = \iota$;

(2) $\|\tau_t\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$;

(3) *preslikavamje* $t \mapsto \tau_t(A)$ *je* $\sigma(X,F)$*-neprekidna za sve* $A \in X$, *tj.* $t \mapsto \eta(\tau_t(A))$ *je neprekidno za sve* $A \in X$ *i* $\eta \in F$;

(4) *preslikavanje* $A \mapsto \tau_t(A)$ *je* $\sigma(X,F)$-$\sigma(X,F)$*-neprekidno za sve* $t \in \mathbb{R}$, *tj.*

$\eta \circ \tau_t \in F$, *za sve* $\eta \in F$.

Primjetimo da je u slučaju $F = X^*$ uslov (4) automatski ispunjen. U svakom slučaju, uslov (4) implicira činjenicu da možemo definisati jednoparametarsku familiju τ_t^* preslikavanja podprostora F pomoću

$$(\tau_t^*\eta)(A) = \eta(\tau_t(A)) .$$

Tada je lako provjeriti da je $t \mapsto \tau_t^*$ $\sigma(X,F)$-neprekidna grupa izometrija podprostora F. Kasnije ćemo vidjeti (Korolar 3.23.) da u slučaju $F = X^*$, uslov (3) prerasta u zahtjev da $t \mapsto \tau_t$ bude jako neprekidno, tj. da preslikavanje $t \mapsto \tau_t(A)$ bude neprekidno u normi, za svako $A \in X$. U slučaju $F = X^*$, grupu τ_t nazivamo C_0-grupa, a ako je $F = X_*$, τ_t nazivamo C_0^*-grupa.

Najvažnije grupe koje ovdje posmatramo spadaju u jednu od sljedeće tri kategorije:

(1) jako neprekidne unitarne grupe na Hilbertovom prostoru, tj. $X=F=\mathcal{H}$ gdje je $\mathcal{H}=\mathcal{H}^*$ Hilbertov prostor;

(2) jako neprekidne grupe *-automorfizama na C*-algebrama. Može se pokazati da su ove grupe automatski izometrije;

(3) slabo neprekidne grupe *-automorfizama von Neumannovih algebri, tj. $X=\mathcal{M}$, $F=\mathcal{M}_*$. U ovom slučaju je uslijed Teoreme 2.28, uslov (4) automatski ispunjen. Ako je $t \mapsto U_t$ jako neprekidna grupa unitarnih elemenata, takvih da $U_t\mathcal{M}U_t^* \subseteq \mathcal{M}$, za sve t, onda je $t \mapsto \tau_t(A) = U_tAU_t^*$ slabo neprekidna grupa *-automorfizama algebre $\mathcal{M}$.

Propozicija 3.18. *Neka je $t \mapsto \tau_t$ $\sigma(X,F)$-neprekidna grupa izometrija i neka je μ Borelova mjera ograničene varijacije na $\mathbb{R}$. Tada za svako $A \in X$ postoji $B \in X$ takav da je*

$$\eta(B) = \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t)\ , \quad \text{za svako } \eta \in F.$$

U skladu sa ovom propozicijom daćemo sljedeću definiciju:

Definicija 3.19. *Ako su operatori A i B povezani kao u Propoziciji 3.18, onda pišemo*

$$B = \int \tau_t(A)d\mu(t).$$

U dokazu Propozicije 3.18. biće od koristi sljedeća teorema koju ćemo navesti bez dokaza.

Teorema Krein-Smuliana. *Konveksni zatvoreni omotač $\overline{co}\,A$ slabo kompaktnog (tj. $\sigma(X,X^*)$-kompaktnog) skupa $A \subseteq X$ je slabo kompaktan.*

Dokaz Propozicije 3.18. Primjetimo prvo da je konveksno zatvorenje bilo kojeg $\sigma(X,F)$-predkompaktnog podskupa prostora X, $\sigma(X,F)$-kompaktno. U slučaju $F=X^*$ to slijedi iz teoreme Krein-Smuliana, a u slučaju $F=X_*$, iz teoreme Alaoglua.

Uzmimo po volji čvrst $A \in X$. Tada se preslikavanjem podprostora F u skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, datim sa

$$F \ni \eta \to \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t) \ ,$$

definiše linearan funkcional na F:

$$f(\eta) = \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t) \qquad (\eta \in F). \tag{*}$$

Tako je

$$|f(\eta)| \leq \int |\eta(\tau_t(A))d\mu(t)| \leq \int \|\eta\| \cdot \|\tau_t(A)\| d\mu(t)$$

$$= \int \|\eta\| \cdot \|A\| d\mu(t) \ = \ \|\eta\| \cdot \|A\| \int d\mu(t) \ = \ \left(\|A\| \cdot \|\mu\|\right) \cdot \|\eta\|,$$

gdje je $\|\mu\|$ totalna varijacija mjere μ.

Dakle, za sve $\eta \in F$, vrijedi

$$|f(\eta)| \leq M\|\eta\|, \quad \text{gdje je} \quad M = \|A\| \cdot \|\mu\|.$$

Ovo znači da je f funkcional na F: $f \in F^*$.

Sada se na izraz $f(\eta)$, zadan sa (*) može, pri promjenljivom $\eta \in F$, gledati kao na djelovanje funkcionala $\eta \in F \subseteq X^*$, na vektor $f \in X$, i pisati

$$\eta(f) = \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t) \qquad (\eta \in F).$$

Na kraju, ako pišemo B umjesto f imamo

$$\eta(B) = \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t) \qquad (\eta \in F).$$

Ako je $F = X^*$, onda je $F^* = X^{**}$, pa je $f \in X^{**}$.

Dokažimo da $f \in X$, tj. $B \in X$.

Kako je $F = X^*$, to je $\sigma(F,X)$-topologija na F u stvari $\sigma(X^*,X)$-topologija na X^*. Ova topologija je najslabija od svih lokalno konveksnih topologija na X^* u odnosu na koju je prostor svih neprekidnih funkcionala jednak X. Isto tako je poznato da je Mackayeva topologija $\tau(X^*,X)$ najjača od svih lokalno konveksnih topologija na X^* u odnosu na koju je prostor svih funkcionala jednak X.

Ako dokažemo da je naš funkcional $\tau(X^*,X)$-neprekidan, onda smo dokazali da $f \in X$.

Napomenimo da se Mackayeva topologija $\tau(X^*,X)$ zadaje pomoću familije polunormi na sljedeći način. Uzmimo proizvoljan zaokružen skup K iz X koji je $\sigma(X,X^*)$-kompaktan. (Zaokružen znači: ako $A \in K$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|=1$, onda $\lambda A \in K$.)
Tada za svaki funkcional $g \in X^*$ stavljamo, po definiciji

$$\|g\|_K = \sup_{x\in K} |g(x)|.$$

Ovim je definisana neka polunorma $\|\cdot\|_K$ na X^*. Ako K mijenjamo na sve moguće načine, dobijamo familiju polunormi definisanih na X^* koja generiše $\tau(X^*,X)$-topologiju.

Da bi dokazali da je naš funkcional f $\tau(X^*,X)$-neprekidan dovoljno je dokazati da postoji konstanta M za koju vrijedi

$$|f(\eta)| \le M\|\eta\|_K \ , \qquad \forall \eta \in \mathrm{F} \ \ (\text{tj. } \eta \in \mathrm{X}^*),$$

za neki $\sigma(X,X^*)$-kompaktan skup u X.

Pretpostavimo najprije da mjera μ ima kompaktan nosač sadržan u nekom segmentu $[-\lambda,\lambda]$, tj. da je

$$\int g(t)d\mu(t) = 0 \ ,$$

za svaku funkciju $g(t)$ koja iščezava u segmentu $[-\lambda,\lambda]$.
Za naš funkcional f,

$$f(\eta) = \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t) \ , \quad \eta \in F(=X^*),$$

imamo

$$f(\eta) = \int \eta(\tau_t(A))d\mu(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \eta(\tau_t(A))d\mu(t) \, . \tag{Δ}$$

Po pretpostavci o grupi τ_t, preslikavanje

$$t \to \tau_t(A)$$

kompaktnog skupa $[-\lambda,\lambda]$ u X je $\sigma(X,X^*)$-neprekidno. Kako je neprekidna slika kompaktnog skupa kompaktan skup, to je i slika K tog preslikavanja $\sigma(X,X^*)$-kompaktan skup.

Odavde i iz (Δ) je , za svaki $A \in X$ i $\eta \in X^* = F$,

$$|f(\eta)| \leq \int_{-\lambda}^{\lambda} |\eta(\tau_t(A))| d\mu(t) \leq \int_{-\lambda}^{\lambda} \sup_{C\in K} |\eta(C)| d\mu(t)$$

$$= \int_{-\lambda}^{\lambda} \|\eta\|_K \, d\mu(t) = \|\eta\|_K \cdot \|\mu\| \ .$$

Znači, za sve $\eta \in X^*$, imamo

$$|f(\eta)| \leq \|\mu\| \cdot \|\eta\|_K \ ,$$

pa je f $\tau(X^*,X)$-neprekidan funkcional na X^*. Odavde slijedi $f \in X$, tj. $B \in X$.

Ukoliko mjera μ nema kompaktan nosač, odaberimo rastući niz $\{K_n\}$ kompaktnih podskupova skupa $\mathbb{R}$ takvih da $|\mu|(\mathbb{R}\backslash K_n) \to 0$. Tada za svako n možemo naći element $B_n \in X$ za koji je

$$\eta(B_n) = \int_{K_n} \eta(\tau_t(A)) d\mu(t) \qquad (\eta \in F).$$

Iz procjene

$$|\eta(B_n) - f(\eta)| \leq \|\eta\| \cdot \|A\| \cdot |\mu| \, (\mathbb{R}\backslash K_n) \ ,$$

slijedi da je $\{B_n\}$ normiran Cauchyev niz u X i da limes $B = \lim_n B_n$ zadovoljava jednakost $f(\eta) = \eta(B)$. □

Primjetimo da Propozicija 3.18. vrijedi pod općijim uslovima od navedenih. Naime, svojstvo (4) u definiciji τ_t je suvišno, jedina svojstva prostora F koja su korištena su

(i) $\|A\| = \sup \{|\eta(A)| : \eta \in F; \|\eta\| \leq 1\}$;

(ii) $\sigma(X,F)$-zatvoreni konveksni omotač svakog $\sigma(X,F)$-kompaktnog podskupa prostora X je $\sigma(X,F)$-kompaktan.

Definiicija 3.20. *Neka je $t \mapsto \tau_t$ $\sigma(X,F)$-neprekidna grupa izometrija. Element $A \in X$ nazivamo analitičkim za τ_t, ako postoji traka*

$$I_\lambda = \{ z : |Im z| < \lambda \}$$

u $\mathbb{C}$ *i funkcija* $f: I_\lambda \to X$ *sa osobinama*

(i) $f(t) = \tau_t(A)$, *za* $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $z \mapsto \eta(f(z))$ *je analitička za sve* $\eta \in F$.

Pod ovim uslovima pišemo

$$f(z) = \sigma_z(A) \ , \quad z \in I_\lambda \, .$$

Naredna propozicija kazuje da je slaba analitičnost iz uslova (ii) ekvivalentna jakoj analitičnosti.

Propozicija 3.21. *Ako je element* A τ_t*–analitičan na traci* I_λ*, onda je* A *jako analitičan na* I_λ*, tj. ako je* $f(z) = \sigma_z(A)$ *onda vrijedi*

(ii′) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(z+h) - f(z)\right]$ *postoji u normi za* $z \in I_\lambda$.

Dokaz. Ako $z \in I_\alpha$, označimo sa C kružnicu s centrom u z radijusa r takvu da $C \subseteq I_\alpha$, a sa K krug s centrom u z radijusa $\frac{r}{2}$. Za svako $x \in K$, prema Cauchyevoj formuli vrijedi,

$$\eta(f(x)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\eta(f(y))}{y-x}\,dy \ , \qquad \eta \in F.$$

Dakle, za $z+h$, $z+g \in K$, vrijedi

$$\frac{1}{h-g}\left\{\frac{1}{h}\left[\eta(f(z+h)) - \eta(f(z))\right] - \frac{1}{g}\left[\eta(f(z+g)) - \eta(f(z))\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\eta(f(y))}{(y-z-h)(y-z-g)(y-z)}\,dy \quad .$$

Za fiksno η, apsolutna vrijednost desne strane jednakosti je uniformno ograničena, jer udaljenost K od C iznosi $\frac{r}{2}$.
Dalje, svakim vektorom

$$\frac{1}{h-g}\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+g)-f(z)}{g}\right] \tag{*}$$

definisan je linearni funkcional $B_{h,g}$ na prostoru F koji na $\eta \in F$, djeluje po pravilu

$$B_{h,g}(\eta) = \eta\left(\frac{1}{h-g}\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+g)-f(z)}{g}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{h-g}\left[\frac{\eta(f(z+h)-f(z))}{h} - \frac{\eta(f(z+g)-f(z))}{g}\right].$$

Znači, svaki vektor oblika (*) se (za razne h i g) posmatra kao element iz F^*.
Sada možemo primjeniti princip ravnomjerne ograničenosti na familiju funkcionala $B_{h,g}$ (tj. na familiju vektora (*) kad se oni posmatraju kao elementi prostora F^*).
Postoji, dakle, konstanta γ za koju vrijedi

$$\left\|B_{h,g}\right\|_{F^*} \leq \gamma \ , \quad \text{za sve } h \text{ i } g,$$

gdje smo sa $\|\cdot\|_{F^*}$ označili normu prostora F^*.

Vidimo da je

$$\left\|\frac{1}{h-g}\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+g)-f(z)}{g}\right]\right\|_{F^*} \leq \gamma \ .$$

Ako je $F = X^*$, tj. $F^* = X^{**}$ odavde slijedi

$$\left\|\frac{1}{h-g}\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+g)-f(z)}{g}\right]\right\| \leq \gamma \ , \qquad (**)$$

gdje $\|\cdot\|$ označava normu u X (zbog izometričnog ulaganja prostora X u X^{**}).
Ako je $F^* = X$, onda je $\|\cdot\|_{F^*} = \|\cdot\|$ pa opet imamo (**).
Iz (**) slijedi

$$\left\|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+g)-f(z)}{g}\right\| \leq \gamma|h-g| \ ,$$

ili

$$\|\varphi(h)-\varphi(g)\| \leq \gamma|h-g| \ , \qquad (***)$$

gdje smo sa $\varphi(x)$ označili vektorsku funkciju $\dfrac{f(z+x)-f(z)}{x}$.

Iz (***) i iz principa konvergencije za funkcije slijedi da postoji konačan $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$, tj. postoji

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(z+x)-f(z)}{x},$$

a to znači da postoji i $\dfrac{df(z)}{dz}$. □

Propozicija 3.22. *Ako je $t \mapsto \tau_t$ $\sigma(X,F)$-neprekidna grupa izometrija i $A \in X$, definišimo*

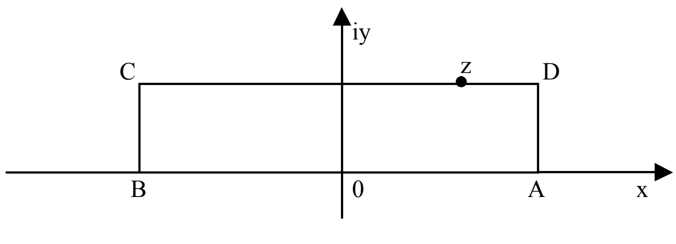
$$A_n = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}}\int \tau_t(A)e^{-nt^2}\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Tada je svaki A_n cijeli analitički element za τ_t, $\|A_n\| \le \|A\|$ za sve n i $A_n \to A$ $(n\to\infty)$ u $\sigma(X,F)$-topologiji. Uz to, τ_t -analitički elementi obrazuju $\sigma(X,F)$-gust podskup prostora X.

Dokaz. Ako u Propoziciji 3.18. odaberemo mjeru $\mu(t)$ tako da je

$$d\mu(t) = e^{-n(t-z)^2}\,dt\ ,$$

tada, za svako z, funkcija $e^{-n(t-z)^2} \in L^1$. Zaista, primjenimo na funkciju $e^{-n(w-\operatorname{Re} z)^2}$ (gdje je w nezavisno promjenljiva) Cauchyevu teoremu duž putanje na slici



$(-B = A)$

puštajući pri tome da $A,B \to \infty$. Tada će integrali duž duži $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ težiti ka nuli, pa tako dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(t-z)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(t-\operatorname{Re} z)^2}\,dt \overset{t-\operatorname{Re} z=\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds\,,$$

što znači da $e^{-n(t-z)^2} \in L^1$.
Iz Propozicije 3.18. sada slijedi da je

$$f_n(z) = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int \tau_t(A) e^{-n(t-z)^2} dt$$

dobro definisano za svako $z \in \mathbb{C}$.
Za $z = s \in \mathbb{R}$ imamo

$$f_n(s) = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int \tau_t(A) e^{-n(t-z)^2} dt \; = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int \tau_{t+s}(A) e^{-nt^2} dt$$

$$= \tau_s\Big(\sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int \tau_t(A) e^{-nt^2} dt \Big) = \tau_s(A_n).$$

Uz to je, za $\eta \in F$,

$$\eta(f_n(z)) = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int \eta(\tau_t(A)) e^{-n(t-z)^2} dt .$$

Kako je $|\eta(\tau_t(A))| \le \|\eta\| \cdot \|A\|$, iz Lebesgueve teoreme dominirane konvergencije slijedi da je sa $z \mapsto \eta(f_n(z))$ data analitička funkcija. Dakle, svaki A_n je analitički element za τ_t.

Dalje, možemo izvesti procjenu

$$\|A_n\| \le \sup_t \{ \; \|\tau_t(A)\| \; \} \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int e^{-nt^2} dt = \|A\| .$$

Primjetimo da je

$$\eta(A_n - A) = \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int e^{-nt^2} \big(\eta(\tau_t(A) - \eta(A)\big) dt \;\; , \quad \text{za sve} \;\; \eta \in F.$$

Za svako $\varepsilon > 0$ možemo odabrati $\delta > 0$, tako, da iz $|t| < \delta$, slijedi

$$|\eta(\tau_t(A)\text{-}\eta(A)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatim, možemo odabrati dovoljno veliko N tako da vrijedi

$$\sqrt{\tfrac{N}{\pi}} \int_{|t| \ge \delta} e^{-Nt^2} dt < \frac{\varepsilon}{4\|\eta\| \cdot \|A\|} .$$

Ako je $n \ge N$ dobijamo

$$|\eta(A_n - A)| \le \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int\limits_{|t|\le\delta} e^{-nt^2} |\eta(\tau_t(A) - \eta(A)| dt + \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int\limits_{|t|\ge\delta} e^{-nt^2} |\eta(\tau_t(A) - \eta(A)| dt$$

$$\le \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int\limits_{|t|\le\delta} e^{-nt^2} dt + 2\|\eta\| \cdot \|A\| \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \int\limits_{|t|\ge\delta} e^{-nt^2} dt$$

$$< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, $A_n \to A$ u $\sigma(X,F)$-topologiji. □

Korolar 3.23. *Ako je* $t \mapsto \tau_t$ $\sigma(X,X^*)$*-neprekidna grupa izometrija, onda je* $t \mapsto \tau_t$ *jako neprekidna, tj.* $t \mapsto \tau_t(A)$ *neprekidno je u normi za svako* $A \in X$ *i* X *sadrži gust u normi skup cijelih analitičkih elemenata za* τ_t.

Dokaz. Prema Propoziciji 3.22, skup cijelih elemenata formira $\sigma(X,X^*)$-gust podskup u X. Ovaj podskup je, jasno, podprostor, te je kao posljedica Hahn-Banachove teoreme, gust u normi u X. (Ako podprostor nije gust u normi, tada bi postojao nenulti linearan funkcional koji iščezava na zatvorenju podprostora. No, to je protivrječno činjenici da je podprostor gust u $\sigma(X,X^*)$-topologiji.) Ako je A analitički element, tada je, prema Propoziciji 3.21, preslikavanje $t \mapsto \tau_t(A)$ diferencijabilno u normi i prema tome, neprekidno u normi. Konačno, za neko opće $A \in X$ možemo pronaći niz A_n analitičkih elemenata koji konvergira ka A i izvršiti procjenu:

$$\|\tau_t(A) - A\| \le \|\tau_t(A - A_n)\| + \|\tau_t(A_n) - A_n\| + \|A_n - A\|$$

$$= 2\|A_n - A\| + \|\tau_t(A_n) - A_n\| \ . \quad □$$

Korolar 3.24. *Ako je* $t \mapsto \tau_t$ $\sigma(X,X_*)$*-neprekidna grupa izometrija i* Y *skup elemenata*
A *takvih da je* $t \mapsto \tau_t(A)$ *neprekidno u normi, onda je* Y *zatvoren u normi,* $\sigma(X,X_*)$*-gust*
podprostor prostora X *i* Y *je zatvorenje u normi skupa cijelih analitičkih elemenata po* τ_t.

Dokaz. Ako je Y_0 zatvorenje u normi skupa cijelih analitičkih elemenata, onda kao u dokazu Korolara 3.23, možemo utvrditi da je restrikcija $\tau\big|_{Y_0}$ jako neprekidna, a prema Propoziciji 3.22, skup Y_0 je $\sigma(X,X_*)$-gust u X.
Sada se lako može vidjeti da ako je A cijeli element za τ, onda je $\tau_z(A)$ cijeli za $z\in\mathbb{C}$. Dakle, cijeli elementi za $\tau\big|_{Y_0}$ podudaraju se sa cijelim elementima za τ. Kako je Y zatvorenje u normi skupa cijelih elemenata za $\tau\big|_{Y}$, iz Korolara 3.23. slijedi $Y_0 = Y$. □

Primjetimo, na kraju, sljedeće: ako je $\tau_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}$ slabo neprekidna grupa *-automorfizama von Neumannove algebre, gdje je Δ pozitivan, invertibilan, hermitski operator, tada je

$$\tau_z(A) = \Delta^{iz} A \Delta^{-iz} , \quad \text{za svaki analitički element } A.$$

Obje strane jednakosti posmatraju se kao bilinearne forme na cijelim vektorima grupe $t \mapsto \Delta^{it}$. Jednakost slijedi iz činjenice da je funkcija, analitička u traci oko realne ose, određena svojim restrikcijama na realnu osu.
Ovu jednostavnu činjenicu ćemo često koristiti u narednom poglavlju.

3.4. SAMODUALNI KONUSI I STANDARDNE FORME VON NEUMANONOVIH ALGEBRI

I u ovom poglavlju $\mathcal{M}$ označava von Neumannovu algebru na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa cikličkim i separirajućim vektorom Ω. Sa Δ i J označavamo respektivno modularni automorfizam i modularnu konjugaciju asociranu paru $(\mathcal{M},\Omega)$. Odgovarajuću grupu modularnih automorfizama označimo sa σ_t, a $\mathcal{M}_0$ *-algebru cijelih analitičkih elemenata za σ.
Konačno, antilineani *-izomorfizam $j : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, definišimo sa $j(A) = JAJ$.

Definicija 3.25. *Zatvorenje skupa*

$$\{ A\, j(A)\Omega \ : A \in \mathcal{M} \}$$

nazivamo prirodni pozitivni konus $\mathcal{P}$ *asociran paru* $(\mathcal{M},\Omega)$.

Propozicija 3.26. *Zatvoren podskup* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$ *ima sljedeće osobine:*

(1) $\mathcal{P} = \overline{\Delta^{\frac{1}{4}} \mathcal{M}_+ \Omega} = \overline{\Delta^{-\frac{1}{4}} \mathcal{M}'_+ \Omega} = \overline{\Delta^{\frac{1}{4}} \overline{\mathcal{M}_+ \Omega}} = \overline{\Delta^{-\frac{1}{4}} \overline{\mathcal{M}'_+ \Omega}}$,
pa je, prema tome konus $\mathcal{P}$ *konveksan;*

(2) $\Delta^{it}\, \mathcal{P} = \mathcal{P}$, *za sve* $t \in \mathbb{R}$;

(3) *ako je* f *pozitivno definitna funkcija, onda je* $f(\ln\Delta)\, \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$;

(4) *ako* $\xi \in \mathcal{P}$, *onda* $J\xi = \xi$;

(5) *ako* $A \in \mathcal{M}$, *onda je* $A\, j(A)\, \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$.

Dokaz. (1) Primjenom jednakosti $\sigma_t(A) = \Delta^{it} A\, \Delta^{-it}$, za $A \in \mathcal{M}_0$, dobijamo

$$\sigma_{-\frac{i}{4}}(A)\sigma_{-\frac{i}{4}}(A^*)\Omega = \Delta^{i(-\frac{i}{4})} A \Delta^{-i(-\frac{i}{4})} \cdot \Delta^{i(-\frac{i}{4})} A^* \Delta^{-i(-\frac{i}{4})}\Omega$$

$$= \Delta^{\frac{1}{4}} A \Delta^{-\frac{1}{4}} \cdot \Delta^{\frac{1}{4}} A^* \Delta^{-\frac{1}{4}}\Omega = \Delta^{\frac{1}{4}} A A^* \Delta^{-\frac{1}{4}}\Omega = \Delta^{\frac{1}{4}} A A^* \Omega \ ,$$

jer je $\Delta^{it}\, \Omega = \Omega$, za svako t.

Dalje, koristeći činjenicu da je Δ^{t} hermitski operator za $t \in \mathbb{R}$, imamo

$$\sigma_{-\frac{i}{4}}(A^*)\Omega = \Delta^{i(-\frac{i}{4})}A^*\Delta^{-i(-\frac{i}{4})}\Omega = \Delta^{\frac{1}{4}}A^*\Delta^{-\frac{1}{4}}\Omega = \left(\Delta^{-\frac{1}{4}}A\Delta^{\frac{1}{4}} \right)^*\Omega$$

$$= \left(\sigma_{\frac{i}{4}}(A)\right)^*\Omega = \mathrm{S}\left(\sigma_{\frac{i}{4}}(A)\right)\Omega = J\Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{\frac{i}{4}}(A)\Omega = J\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{4}}A\Delta^{\frac{1}{4}}\Omega$$

$$= J\Delta^{\frac{1}{4}}A\Delta^{\frac{1}{4}}\Omega = J\Delta^{\frac{1}{4}}A\Delta^{\frac{1}{4}}(\Delta^{-\frac{1}{2}}\Omega) = J\Delta^{\frac{1}{4}}A\Delta^{-\frac{1}{4}}\Omega = J\sigma_{-\frac{i}{4}}(A)\Omega\ .$$

Iz prethodno provedenih računa, za $A \in \mathcal{M}_0$, dobijamo

$$\Delta^{\frac{1}{4}}AA^*\Omega = \sigma_{-\frac{i}{4}}(A)\sigma_{-\frac{i}{4}}(A^*)\Omega = \sigma_{-\frac{i}{4}}(A)\Omega\left(\sigma_{\frac{i}{4}}(A)\right)^*\Omega =$$

$$= \sigma_{-\frac{i}{4}}(A)\Omega\ J\Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{\frac{i}{4}}(A)\Omega = \sigma_{-\frac{i}{4}}(A)J\sigma_{-\frac{i}{4}}(A)J\Omega$$

$$= \mathrm{BJBJ}\Omega = \mathrm{Bj(B)}\Omega,$$

gdje je $B = \sigma_{-\frac{i}{4}}(A)$. Kako je $\sigma_{-\frac{i}{4}}(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_0$ i $\mathcal{M}_0$ jako* gust u $\mathcal{M}$, iz prethodne jednakosti i teoreme Kaplanskog slijedi

$$Bj(B)\Omega \in \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\mathcal{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\overline{\mathcal{M}_+\Omega}}\ , \quad \text{za svako} \quad B \in \mathcal{M}.$$

Otuda je

$$\mathcal{P} \subseteq \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\mathcal{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\overline{\mathcal{M}_+\Omega}}\ .$$

Obratno, prema teoremi Kaplanskog, $\mathcal{M}_{0+}$ je jako* gust u $\mathcal{M}_+$, dakle, $\mathcal{M}_{0+}\Omega$ je gust u $\overline{\mathcal{M}_+\Omega}$. Za $\psi \in \overline{\mathcal{M}_+\Omega}$, odaberimo niz $A_n \in \mathcal{M}_{0+}$ tako da $A_n\Omega \to \psi$. Tada je, prema jednakostima na početku dokaza, $\Delta^{\frac{1}{4}}A_n\Omega \in \mathcal{P}$. Uz to imamo da je

$$J\Delta^{\frac{1}{2}}A_n\Omega = A_n\Omega \to \psi = J\Delta^{\frac{1}{2}}\psi\ ,$$

prema tome,

$$\left\|\Delta^{\frac{1}{4}}(\psi - A_n\Omega)\right\|^2 = (\psi - A_n\Omega, \Delta^{\frac{1}{2}}(\psi - A_n\Omega)) \to 0\ .$$

Odavde dobijamo $\Delta^{\frac{1}{4}}\psi \in \mathcal{P}$ i $\overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\overline{\mathcal{M}_+\Omega}} \subseteq \mathcal{P}$.

Kombinacija ovih dviju inkluzija daje

$$\mathcal{P} = \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\mathcal{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\overline{\mathcal{M}_+\Omega}}\ .$$

Ako je $\mathcal{P}'$ prirodni konus, koji odgovara paru $(\mathcal{M}',\Omega)$, onda je $\mathcal{P}'$ zatvorenje skupa elemenata oblika

$$\begin{aligned} A'j(A')\Omega &= j(j(A'))j(A')\Omega \\ &= j(A)A\Omega \\ &= Aj(A)\Omega , \end{aligned}$$

gdje je $A=j(A')\in\mathcal{M}$. Dakle, $\mathcal{P}'=\mathcal{P}$. Budući da je Δ^{-1} modularni operator koji odgovara paru $(\mathcal{M}',\Omega)$, to iz prvog dijela dokaza slijedi

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}'=\overline{\Delta^{-\frac{1}{4}}\mathcal{M}'_+\Omega}=\overline{\Delta^{-\frac{1}{4}}\overline{\mathcal{M}'_+\Omega}} \quad .$$

Ovim smo kompletirali dokaz osobine (1).

(2) Iz osobine (1) i iz jednakosti

$$\begin{aligned} \Delta^{it}\Delta^{\frac{1}{4}}\mathcal{M}_+\Omega &= \Delta^{\frac{1}{4}}\Delta^{it}\mathcal{M}_+\Omega \\ &= \Delta^{\frac{1}{4}}\sigma_t(\mathcal{M}_+)\Omega = \Delta^{\frac{1}{4}}\mathcal{M}_+\Omega \ , \end{aligned}$$

slijedi osobina (2).

(3) Prisjetimo se da su pozitivno definitne funkcije oblika

$$f(x)=\int e^{itx}d\mu(t),$$

gdje je μ pozitivna konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}$. Stoga je

$$f(\ln\Delta)=\int\Delta^{it}d\mu(t).$$

Zbog zatvorenosti konusa $\mathcal{P}$, slijedi osobina (3).

(4) Iz jednakosti

$$JAj(A)\Omega = j(A)A\Omega = Aj(A)\Omega ,$$

slijedi osobina (4).

(5) Ovo svojstvo slijedi iz jednakosti

$$Aj(A)Bj(B)\Omega = ABj(A)j(B)\Omega = ABj(AB)\Omega ,$$

u kojoj smo koristili činjenicu da $j(A)\in\mathcal{M}'$, ako $A\in\mathcal{M}$. □

Sljedeća propozicija predstavlja pripremu za dokaz da je konus $\mathcal{P}$ samodualan.

Propozicija 3.27.
(1) *Neka* $\eta\in\mathcal{H}$ *i pretpostavimo da je* $(\eta, A\Omega)\geq 0$ *za* $A\in\mathcal{M}_+$. *Tada postoji pozitivan, hermitski operator* Q' *asociran sa* $\mathcal{M}'$ *takav da vrijedi* $\eta = Q'\Omega$.

(2) $\overline{\mathcal{M}_+\Omega}$ *i* $\overline{\mathcal{M}'_+\Omega}$ *su dualni konusi u* $\mathcal{H}$, *tj.*

$$\overline{\mathcal{M}_+\Omega} = \{\ \xi\in\mathcal{H};\ \ (\xi,\eta)\geq 0 \ \ \text{za sve} \ \ \eta\in\overline{\mathcal{M}'_+\Omega}\},$$
$$\overline{\mathcal{M}'_+\Omega} = \{\ \xi\in\mathcal{H};\ \ (\xi,\eta)\geq 0 \ \ \text{za sve} \ \ \eta\in\overline{\mathcal{M}_+\Omega}\}.$$

Dokaz. (1) Definišimo operator A' na skupu $\mathcal{D}(A') = \mathcal{M}\Omega$ pomoću

$$A'A\Omega = A\eta \ , \ \ A\in\mathcal{M}.$$

Za svaki unitarni operator $U\in\mathcal{M}$ vrijedi

$$A'UA\Omega = UA\eta = UA'A\Omega\,,$$

tj.

$$UA'U^* = A'\,.$$

Osim toga,

$$(A\Omega, A'A\Omega) = (A\Omega, A\eta) = (\eta, A^*A\Omega) \geq 0.$$

Prema tome, A' je pozitivan, simetričan operator. Neka je Q' Friedrichsova ekstenzija operatora A'. Tada je Q' pozitivan, hermitski operator i, zbog jedinstvenosti Friedrichsove ekstenzije, vrijedi

$$UQ'U^* = Q'\,, \quad \text{za sve unitarne elementa u } \mathcal{M}.$$

Znači, $UQ' = Q'U$, tj. Q' komutira sa svakim unitarnim operatorom U iz $\mathcal{M}$. Zbog toga on komutira i sa svakim hermitskim operatorom, jer se svaki hermitski operator A iz $\mathcal{M}$ može napisati u obliku

$$A = i(U+\boldsymbol{I})(U-\boldsymbol{I})^{-1}\ , \qquad \text{gdje je } U \text{ unitaran operator.}$$

Kako se svaki operator A može prikazati u obliku zbira dva hermitska operatora: $A = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2i}$, to Q' komutira sa svakim operatorom iz $\mathcal{M}$. Dakle, operator Q' je asociran sa $\mathcal{M}'$ i

$$Q'\Omega = A'\Omega = \eta\,.$$

(2) Uvedimo najprije za svaki podskup $K\subset\mathcal{H}$ notaciju

$$K^{\vee} = \{\eta \in \mathcal{H};\ (\xi, \eta) \geq 0 \quad \text{za sve} \quad \xi \in K\}.$$

Za $A \in \mathcal{M}_+$ i $A' \in \mathcal{M}_+'$ je

$$(A\Omega, A'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}\Omega, A'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}}\Omega, (A^{\frac{1}{2}})^* A'\Omega)$$

$$= (A^{\frac{1}{2}}\Omega, A^{\frac{1}{2}} A'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}}\Omega, A' A^{\frac{1}{2}}\Omega) \geq 0,$$

jer $A' \in \mathcal{M}_+'$, pa je za $\hat{\Omega} = A^{\frac{1}{2}}\Omega \in \mathcal{H}$, $(\hat{\Omega}, A'\Omega) \geq 0$.

Tako je $\overline{\mathcal{M}_+\Omega} \subseteq \overline{\mathcal{M}_+'\Omega}^{\vee}$ i $\overline{\mathcal{M}_+'\Omega} \subseteq \overline{\mathcal{M}_+\Omega}^{\vee}$. Ako je $\eta \in \overline{\mathcal{M}_+\Omega}^{\vee}$, onda iz prvog dijela propozicije slijedi $\eta = Q'\Omega$, za pozitivan hermitski operator Q' asociran sa $\mathcal{M}'$.
Ako je E_n' spektralna projekcija operatora Q' koja odgovara intervalu $[0, n]$, tada $Q'E_n' \in \mathcal{M}_+'$ i $\lim_{n\to\infty} Q'E_n'\Omega = Q'\Omega = \eta$.

Odavde dobijamo $\eta \in \overline{\mathcal{M}_+'\Omega}$ i $\overline{\mathcal{M}_+\Omega}^{\vee} = \overline{\mathcal{M}_+'\Omega}$. □

.

Sada se može potvrditi najvažnija geometrijska osobina konusa $\mathcal{P}$.

Propozicija 3.28.

(1) *$\mathcal{P}$ je samodualan konus, tj. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\vee}$, gdje je*

$$\mathcal{P}^{\vee} = \{\eta \in \mathcal{H};\ (\xi, \eta) \geq 0 \ \text{za sve} \ \xi \in \mathcal{P}\}.$$

(2) *Konus $\mathcal{P}$ je oštar, tj.*
$\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}$.

(3) *Ako je $J\xi = \xi$, onda ξ ima jedinstvenu dekompoziciju $\xi = \xi_1 - \xi_2$, gdje $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}$ i $\xi_1 \perp \xi_2$.*

(4) *Prostor $\mathcal{H}$ je linearno razapet sa $\mathcal{P}$.*

Dokaz. **(1)** Ako $A \in \mathcal{M}_+$ i $A' \in \mathcal{M}_+'$, onda je

$$(A\Omega, A'\Omega) = ((A^{\frac{1}{2}})^2\Omega, A'\Omega),$$

gdje je $A^{\frac{1}{2}}$ hermitski operator i $A^{\frac{1}{2}} \geq 0$ (tj. $(\xi, A^{\frac{1}{2}}\xi) \geq 0$ $\forall \xi \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$). Znači,

$$(A\Omega, A'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}\Omega, A'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}}\Omega, A^{\frac{1}{2}} A'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}}\Omega, A' A^{\frac{1}{2}}\Omega),$$

jer A' komutira sa $A^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_+$.
Odavde slijedi da je posljednji izraz nenegativan, jer je $A' \geq 0$.
S obzirom da se svaki element iz $\mathcal{P}$ može napisati u obliku $\Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega$, $A \in \mathcal{M}_+$ (tj. u obliku $\Delta^{-\frac{1}{4}} A'\Omega$, $A' \in \mathcal{M}_+'$), biće

$$(\Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega, \Delta^{-\frac{1}{4}} A'\Omega) = (A\Omega, A'\Omega) = (\Omega, A^{\frac{1}{2}} A' A^{\frac{1}{2}} \Omega) \geq 0,$$

pa je, prema Propoziciji 3.26(1), $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^{\vee}$.

Obratno, pretpostavimo da $\xi \in \mathcal{P}^{\vee}$, tj. $(\xi, \eta) \geq 0$ za sve $\eta \in \mathcal{P}$.
Prisjetimo se sada da pozitivan operator Δ možemo napisati u obliku integrala

$$\Delta\xi = \int_0^{\infty} \lambda dE_\lambda \xi \ , \tag{1}$$

gdje E_λ predstavlja spektralnu familiju operatora Δ. Ako je $f(\lambda)$ neka neprekidna funkcija definisana na $[0, +\infty]$, tada ćemo sa $f(\Delta)$ označiti operator definisan sa

$$f(\Delta)\xi = \int_0^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda \xi \ . \tag{2}$$

Ako za funkciju $f(\lambda)$ odaberemo niz funkcija $f_n(\ln\lambda) = e^{-\frac{(\ln\lambda)^2}{2n^2}}$, dobićemo vektore

$$\xi_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\ln\lambda)^2}{2n^2}} dE_\lambda \xi \ .$$

Pokažimo da vektor ξ_n pripada svakoj oblasti definicije operatora Δ^{α}, $\alpha \in \mathbb{C}$, gdje je operator Δ^{α} definiran sa

$$\Delta^{\alpha}\xi = \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} dE_\lambda \xi \ . \tag{3}$$

Pri tome, $\xi \in \mathcal{D}(\Delta^{\alpha})$ ako i samo ako integral u (3) konvergira. Treba, dakle, provjeriti da li integral

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} dE_\lambda \xi_n$$

konvergira, za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$.

Imamo

$$\int_0^\infty \lambda^\alpha dE_\lambda \xi_n = \int_0^\infty \lambda^\alpha dE_\lambda \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi \quad . \tag{4}$$

Iz osobina spektralne familije E_λ slijedi da je

$$E_\lambda \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi = \int_0^\lambda e^{-\frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi \ ,$$

pa je

$$dE_\lambda \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi = d\int_0^\lambda e^{-\frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi = e^{-\frac{(\ln\lambda)^2}{2n^2}} dE_\lambda \xi \ .$$

Vidimo da integral na desnoj strani jednakosti (4) ima oblik

$$\int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-\frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi = \int_0^\infty e^{\alpha\ln\lambda - \frac{(\ln\mu)^2}{2n^2}} dE_\mu \xi \ .$$

Kako je funkcija

$$e^{\alpha\ln\lambda - \frac{(\ln\lambda)^2}{2n^2}} = e^{(\alpha - \frac{\ln\lambda}{2n^2})\ln\lambda}$$

ograničena na intervalu $(0,+\infty)$, to ovaj integral konvergira, pa odatle i slijedi da $\xi_n \in \bigcap_{\alpha\in\mathbf{C}} \mathcal{D}(\Delta^\alpha)$. Osim toga, $\xi_n \to \xi$.

Neka $\eta \in \mathcal{P}$. Kako je f_n pozitivno definitna funkcija to, prema Propoziciji 3.26(3), $f_n(\ln\Delta)\eta \in \mathcal{P}$.

Stoga je

$$(\xi_n, \eta) = (\xi, f_n(\ln\Delta)\eta) \geq 0 \ , \qquad \eta \in \mathcal{P}.$$

Neka je $A \in \mathcal{M}_+$. Tada $\Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega \in \mathcal{P}$ i

$$(\Delta^{\frac{1}{4}} \xi_n, A\Omega) = (\xi_n, \Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega) \geq 0.$$

Odavde i iz Propozicije 3.27(2) dobijamo $\Delta^{\frac{1}{4}} \xi_n \in \overline{\mathcal{M}_+\Omega}^{\vee} = \overline{\mathcal{M}'_+\Omega}$.

Dakle, $\xi_n \in \Delta^{-\frac{1}{4}}\,\overline{\mathcal{M}'_+\Omega} \subseteq \mathcal{P}$. Kako je konus $\mathcal{P}$ zatvoren, $\xi = \lim_n \xi_n \in \mathcal{P}$, tj. $\mathcal{P}^{\vee} \subseteq \mathcal{P}$.

Time je potvrđena samodualnost konusa $\mathcal{P}$.

Osobine (2), (3) i (4) su posljedica osobine (1).

(2) Ako $\xi \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}^{\vee})$, tada je $(\xi, -\xi) \geq 0$. Dakle, $\xi = 0$.

(3) Pretpostavimo da je $J\xi = \xi$. Kako je $\mathcal{P}$ zatvoren konveksan skup u Hilbertovom prostoru to postoji jedinstven $\xi_1 \in \mathcal{P}$ takav da vrijedi

$$\|\xi - \xi_1\| = \inf\{\ \|\xi - \eta\|;\ \eta \in \mathcal{P}\ \}.$$

Stavimo $\xi_2 = \xi_1 - \xi$ i pretpostavimo da je $\eta \in \mathcal{P}$ i $\lambda > 0$. Tada $\xi_1 + \lambda\eta \in \mathcal{P}$ i

$$\|\xi_1 - \xi\|^2 \leq \|\xi_1 + \lambda\eta - \xi\|^2 ,$$

tj. $\|\xi_2\|^2 \leq \|\xi_2 + \lambda\eta\|^2$. Ovo je dalje ekvivalentno sa

$$\lambda^2\|\eta\|^2 + 2\lambda \cdot \mathrm{Re}(\xi_2, \eta) \geq 0 , \quad \text{za sve } \lambda > 0.$$

Dakle, mora biti $\mathrm{Re}(\xi_2, \eta) \geq 0$. Sada iz $J\xi = \xi$, tj. $J\xi_1 - J\xi_2 = \xi_1 - \xi_2$ i iz $J\xi_1 = \xi_1$ slijedi $J\xi_2 = \xi_2$. Zbog $\eta \in \mathcal{P}$ je $J\eta = \eta$. Na taj način dobijamo

$$(\xi_2, \eta) = (J\xi_2, J\eta) = \overline{(\xi_2, \eta)} ,$$

pa (ξ_2, η) mora biti realan broj. Znači, $(\xi_2, \eta) \geq 0$.
Kako je $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\vee}$, to $\xi_2 \in \mathcal{P}$. Dakle, $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}$.

Dokažimo da je $\xi_1 \perp \xi_2$. Zbog $(1-\lambda)\xi_1 \in \mathcal{P}$, za $0 \leq \lambda \leq 1$, vrijedi

$$\|\xi_1 - \xi\|^2 \leq \|(1-\lambda)\xi_1 - \xi\|^2 ,$$

tj.

$$\|\xi_2\|^2 \leq \|\xi_2 - \lambda\xi_1\|^2 .$$

Ovo je opet ekvivalentno sa

$$\lambda^2\|\xi_1\|^2 - 2\lambda(\xi_1, \xi_2) \geq 0 ,$$

pa mora biti $(\xi_1, \xi_2) \leq 0$. No, i ξ_1 i ξ_2 su iz $\mathcal{P}$, dakle, $(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Da bi dokazali jedinstvenost dekompozicije, posmatrajmo dvije dekompozicije

$$\xi = \xi_1 - \xi_2 \ , \qquad \xi_1\ \xi_2 \in \mathcal{P} \ , \ \ \xi_1 \perp \xi_2$$

i

$$\xi = \eta_1 - \eta_2 \ , \qquad \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{P} \ , \ \ \eta_1 \perp \eta_2 .$$

Tada je

$$\xi_1 - \eta_1 = \xi_2 - \eta_2$$

i zbog toga

$$\|\xi_1 - \eta_1\|^2 = (\xi_1 - \eta_1,\ \xi_2 - \eta_2) = -(\eta_1,\ \xi_2) - (\xi_1,\ \eta_2) \le 0.$$

Znači, $\xi_1 = \eta_1$, a kao posljedica toga i $\xi_2 = \eta_2$. Time smo dokazali da su posmatrane dekompozicije identične.

(4) Ako je ξ okomit na linearni omotač konusa $\mathcal{P}$, onda $\xi \in \mathcal{P}^{\vee} = \mathcal{P}$. Dakle, $(\xi, \xi) = 0$ i $\xi = 0$. □

Primjer 3.29. Neka je $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, gdje je Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan. Posmatrajmo normalno stanje ω zadano pomoću matrice gustine ρ,

$$\omega(A) = Tr(\rho A) \ , \quad \text{za sve } A \in \mathcal{M}.$$

U Primjeru 2.5. pokazali smo da je ω vjerno stanje ako i samo ako je ρ invertibilna matrica. Koristeći jednakost za modularne grupe

$$\sigma_t^{\omega}(A) = \rho^{it} A \rho^{-it} ,$$

datu u Primjeru 2.16, nalazimo

$$\mathcal{P} = \{ \ \psi_A : \psi_A = \pi_\omega(\rho^{\frac{1}{4}} A^* A \rho^{-\frac{1}{4}})\Omega_\omega \ , \ A \in \mathcal{M} \ \} \ .$$

Iz

$$(\psi_B,\ \psi_A) = Tr(\rho(\rho^{\frac{1}{4}} B^* B \rho^{-\frac{1}{4}})(\rho^{\frac{1}{4}} A^* A \rho^{-\frac{1}{4}}))$$

$$= Tr(\rho^{\frac{1}{2}} B^* B \rho^{\frac{1}{2}} A^* A) =$$

$$= Tr((B\rho^{\frac{1}{2}} A)^* (B\rho^{\frac{1}{2}} A)) \ge 0$$

slijedi uslov dualnosti.

Propozicija 3.30. ***(Univerzalnost konusa $\mathcal{P}$)***

(1) *Ako je $\xi \in \mathcal{P}$, onda je vektor ξ ciklički za $\mathcal{M}$ ako i samo ako je ξ separirajući za $\mathcal{M}$.*

(2) *Ako je $\xi \in \mathcal{P}$ ciklički, dakle separirajući vektor, tada modularna konjugacija J_ξ i prirodni pozitivan konus $\mathcal{P}_\xi$, asociran paru $(\mathcal{M}, \xi)$, zadovoljavaju jednakosti*

$$J_\xi = J, \quad \mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}.$$

Dokaz. (1) Ako je vektor $\xi \in \mathcal{P}$ ciklički za $\mathcal{M}$, onda je $J\xi$ ciklički za $\mathcal{M}' = J\mathcal{M}J$. Dakle, vektor $\xi = J\xi$ je separirajući za $\mathcal{M}$ i obratno.

(2) Neka je S_ξ zatvorenje preslikavanja

$$A\xi \to A^*\xi, \quad A \in \mathcal{M},$$

a F_ξ zatvorenje preslikavanja

$$A'\xi \to A'^*\xi, \quad A' \in \mathcal{M}'.$$

Za svako $A \in \mathcal{M}$ imamo

$$\begin{aligned} JF_\xi JA\xi &= JF_\xi (JAJ)\xi \\ &= J(JAJ)^*\xi \\ &= A^*\xi = S_\xi A\xi. \end{aligned}$$

Dakle, $S_\xi \subseteq JF_\xi J$.

Simetričnim argumentom dobijamo $F_\xi \subseteq JS_\xi J$ i otuda $JS_\xi = F_\xi J$. Otuda je

$$(JS_\xi)^* = S_\xi^* J = F_\xi J = JS_\xi,$$

što pokazije da je operator JS_ξ autoadjungovan.

Pokažimo da je operator JS_ξ pozitivan. Kako je operator JS_ξ jednak zatvorenju svoje restrikcije na $\mathcal{M}\xi$, dovoljno je pokazati da je

$$(A\xi, JS_\xi A\xi) \geq 0, \quad \text{za } A \in \mathcal{M}.$$

Osim toga, vrijedi

$$\begin{aligned} (A\xi, JS_\xi A\xi) &= (A\xi, JA^*\xi) \\ &= (\xi, A^* j(A^*)\xi) \geq 0, \end{aligned}$$

jer i ξ i $A^* j(A^*)\xi$ leže u konusu $\mathcal{P}$.

Sada imamo

$$S_\xi = J_\xi \Delta_\xi^{\frac{1}{2}} = J(JS_\xi).$$

Zbog jedinstvenosti polarne dekompozicije, slijedi

$$J_\xi = J\,.$$

Da bismo dokazali posljednju tvrdnju teoreme, primjetimo da je $\mathcal{P}_\xi$ generisan elementima oblika

$$Aj_\xi(A)\xi = Aj(A)\xi.$$

Po pretpostavci $\xi\in\mathcal{P}$, pa prema Propoziciji 3.26.(5), i $Aj(A)\xi\in\mathcal{P}$. Tako dobijamo

$$\mathcal{P}_\xi \subseteq \mathcal{P}.$$

Uz to vrijedi

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\check{}} \subseteq \mathcal{P}_\xi^{\check{}} = \mathcal{P}_\xi\,.$$

Znači,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_\xi\,. \quad \square$$

Nakon razmatranja geometrijskih svojstava prirodnog pozitivnog konusa $\mathcal{P}$, pokazaćemo da se sve pozitivne, normalne forme na $\mathcal{M}$ mogu predstaviti pomoću jedinstveno određenog vektora u konusu. Kao posljedicu toga možemo zaključiti da sve automorfizme algebre $\mathcal{M}$ možemo zadati pomoću unitarnih elemenata u odnosu na koje je konus invarijantan.

Teorema 3.31. *Za svaki vektor $\xi\in\mathcal{P}$ definišimo pozitivnu normalnu formu $\omega_\xi\in\mathcal{M}_{*+}$ sa*

$$\omega_\xi(A) = (\xi, A\xi)\,, \qquad A\in\mathcal{M}.$$

Tada vrijedi:

(1) *za svako $\omega\in\mathcal{M}_{*+}$ postoji jedinstven vektor $\xi\in\mathcal{P}$ takav da je*

$$\omega = \omega_\xi\,;$$

(2) *preslikavanje $\xi \mapsto \omega_\xi$ je homeomorfizam kada su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{M}_{*+}$ snabdjeveni normiranom topologijom. Osim toga, vrijedi i slijedeća procjena*

$$\|\xi-\eta\|^2 \le \|\omega_\xi-\omega_\eta\| \le \|\xi-\eta\|\cdot\|\xi+\eta\|.$$

Napomena. U teoremi smo definisali preslikavanje $\xi \in \mathcal{P} \mapsto \omega_\xi \in \mathcal{M}_{*+}$. Inverzno preslikavanje označimo sa $\omega \mapsto \xi(\omega)$. Može se dokazati da je preslikavanje $\omega \mapsto \xi(\omega)$ monotono rastuće i konkavno u odnosu na prirodni poredak konusa $\mathcal{M}_{*+}$ i $\mathcal{P}$ i izvesti formula za $\xi(\omega)$, ako je $\omega \leq C\omega_\Omega$, za neku konstantu C. U tom slučaju, koristeći Teoremu 3.19, dolazimo do zaključka da je $\omega(A) = (A'\Omega, AA'\Omega)$, za $A' \in \mathcal{M}_+'$. Odavde dobijamo $\xi(\omega) = \left|A'\Delta^{-\frac{1}{2}}\right|\Omega$, gdje je $\left|A'\Delta^{-\frac{1}{2}}\right|$ pozitivan dio polarne dekompozicije operatora $A'\Delta^{-\frac{1}{2}}$.

Sada ćemo navesti i važnu posljedicu prethodne teoreme.

Korolar 3.32. *Postoji jedinstvena unitarna reprezentacija*

$$\alpha \in Aut(\mathcal{M}) \mapsto U(\alpha)$$

grupe $Aut(\mathcal{M})$ *svih *-automorfizama algebre* $\mathcal{M}$ *na prostor* $\mathcal{H}$ *koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(a) $U(\alpha)AU(\alpha)^* = \alpha(A)$, $A \in \mathcal{M}$;

(b) $U(\alpha)\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$ *i osim toga,*

$$U(\alpha)\xi(\omega) = \xi(\alpha^{-1}{}^*(\omega)), \quad \omega \in \mathcal{M}_{*+},$$

gdje je $(\alpha^*\omega)(A) = \omega(\alpha(A))$;

(c) $[U(\alpha), J] = 0$.

Preslikavanje $\alpha \in Aut\mathcal{M} \mapsto U(\alpha) \in U(Aut\mathcal{M})$ *je homeomorfizam ako su skupovi* $Aut\mathcal{M}$ *i* $U(Aut\mathcal{M})$ *snabdjeveni normiranom topologijom. Ovo preslikavanje je, također, homeomorfizam i kada je* $U(Aut\mathcal{M})$ *snabdjeven slabom, jakom ili jakom* topologijom (koje su ekvivalentne) i* $Aut\mathcal{M}$ *snabdjeven topologijom jake konvergencije elemenata iz* $Aut(\mathcal{M})^*$ *na* $\mathcal{M}_*$. *(*$\alpha \to \beta$ *u ovoj topologiji ako i samo ako* $\alpha^*(\omega) \to \beta^*(\omega)$ *u normi za svako* $\omega \in \mathcal{M}_*$.*)*

Dokaz Teoreme 3.31. i njene posljedice je prilično dugačak. Radi bolje preglednosti razbićemo dokaz te teoreme na nekoliko lema.

Lema. 3.33. *Neka su vektori* ξ_1 *i* ξ_2 *ciklički i separirajući za* $\mathcal{M}$ *i neka je* $\mathcal{H}_4$ *četverodimenzionalni Hilbertov prostor sa* *ortonormiranom bazom* η_{ij}*, i,j=1,2. Neka je* $\mathcal{F}$ *algebra* 2×2 *matrica generisana na* $\mathcal{H}_4$ *matricama* E_{ij} *koje su definisane sa*

$$E_{ij}\,\eta_{kl} = \delta_{jk}\,\eta_{il}\,.$$

Osim toga, neka je $\mathcal{F}'$ *komutant algebre* $\mathcal{F}$*, tj. algebra* 2×2 *matrica generisana onim* F_{ij} *za koje* $F_{ij}\,\eta_{kl} = \delta_{jl}\,\eta_{ki}$*.*
Konačno, neka je $\mathcal{A} = \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_4$*,* $\Omega_0 = \xi_1\otimes\eta_{11}+\xi_2\otimes\eta_{22}$*,* $\mathcal{N}=\mathcal{M}\otimes\mathcal{F}$ *i neka je* $U_{ij}:\mathcal{H}\to\mathcal{A}$ *izometrija definisana sa* $U_{ij}\,\xi = \xi\otimes\eta_{ij}$*.*
Tada je Ω_0 *ciklički i separirajući vektor za* $\mathcal{N}$ *na* $\mathcal{A}$*. Odgovarajuća involucija* S_{Ω_0} *asocirana paru* $(\mathcal{N},\Omega_0)$ *zadovoljava jednakost*

$$S_{\Omega_0} = U_{11}\,S_{\xi_1}\,U_{11}^* + U_{21}\,S_{\xi_1,\xi_2}\,U_{12}^* + U_{12}\,S_{\xi_2,\xi_1}\,U_{21}^* + U_{22}\,S_{\xi_2}\,U_{22}^*\,,$$

gdje je s S_{ξ_1,ξ_2} *označeno zatvorenje operatora koji je na* $\mathcal{M}\xi_2$ *definisan sa*

$$S_{\xi_1,\xi_2}\,A\xi_2 = A^*\xi_1\ ,\quad A\in\mathcal{M}.$$

Dokaz. Svaki element $A\in\mathcal{N}$ je oblika

$$A = \sum_{ij} A_{ij}\otimes E_{ij}\ ,\quad \text{gdje } A_{ij}\in\mathcal{M}.$$

Tako je

$$A\Omega_0 = A_{11}\xi_1\otimes\eta_{11} + A_{12}\xi_2\otimes\eta_{12} + A_{21}\xi_1\otimes\eta_{21} + A_{22}\xi_2\otimes\eta_{22}\,.$$

Ovo pokazuje da je vektor Ω_0 ciklički i separirajući za $\mathcal{N}$, tako da možemo definisati S_{Ω_0} kao zatvorenje preslikavanja

$$A\Omega_0 \mapsto A^*\Omega_0\ ,\ A\in\mathcal{N}.$$

Koristeći gornju notaciju A^* se može napisati u obliku:

$$A^* = A_{11}^*\otimes E_{11} + A_{21}^*\otimes E_{12} + A_{12}^*\otimes E_{21} + A_{22}^*\otimes E_{22}$$

i

$$A^*\Omega_0 = A_{11}^*\xi_1\otimes\eta_{11} + A_{21}^*\xi_2\otimes\eta_{12} + A_{12}^*\xi_1\otimes\eta_{21} + A_{22}^*\xi_2\otimes\eta_{22}\,.$$

Uzimajući zatvorenje obiju strana gornje jednakosti dobijamo zatvorenost operatora S_{ξ_1,ξ_2} i

$$S_{\Omega_0} = U_{11}\,S_{\xi_1}\,U_{11}^* + U_{21}\,S_{\xi_1,\xi_2}\,U_{12}^* + U_{12}\,S_{\xi_2,\xi_1}\,U_{21}^* + U_{22}\,S_{\xi_2}\,U_{22}^*\,.\ \square$$

Lema 3.34. *Zadržimo oznake iz Leme 3.33. i pretpostavimo da je* $S_{\xi_1,\xi_2} = J_{\xi_1,\xi_2}\Delta^{\frac{1}{2}}_{\xi_1,\xi_2}$ *polarna dekompozicija operatora* S_{ξ_1,ξ_2}. *Tada će vrijediti*

$$J_{\Omega_0} = U_{11} J_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} J_{\xi_1,\xi_2} U_{12}^* + U_{12} J_{\xi_2,\xi_1} U_{21}^* + U_{22} J_{\xi_2} U_{22}^*$$

i

$$\Delta_{\Omega_0} = U_{11} \Delta_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} \Delta_{\xi_2,\xi_1} U_{12}^* + U_{12} \Delta_{\xi_1,\xi_2} U_{21}^* + U_{22} \Delta_{\xi_2} U_{22}^*$$

Dokaz. Ako se S_{Ω_0}, J_{Ω_0} i Δ_{Ω_0} posmatraju kao 4×4 matrice, odmah se vidi da je desna strana prve jednakosti leme izometrija sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$, a da je desna strana druge jednakosti leme pozitivni hermitski operator. Zbog jedinstvenosti polarne dekompozicije, dovoljno je potvrditi jednakost $J_{\Omega_0}\Delta^{\frac{1}{2}}_{\Omega_0} = S_{\Omega_0}$, što slijedi neposredno iz jednakosti leme. □

Lema. 3.35. *Zadržimo oznake i pretpostavke iz Leme 3.33. i Leme 3.34. Tada postoji jedinstven unitaran element* $U' \in \mathcal{M}'$ *takav da je*

$$J_{\Omega_0} (\mathbf{I} \otimes E_{21}) J_{\Omega_0} = U' \otimes F_{21} ,$$

za koji vrijedi

$$J_{\xi_2,\xi_1} = U' J_{\xi_1} , \quad J_{\xi_1,\xi_2} = J_{\xi_1} U'^* , \quad J_{\xi_2} = U' J_{\xi_1} U'^* .$$

Dokaz. Kako je $J^2_{\Omega_0} = \boldsymbol{I}$, to prema Lemi 3.34, vrijedi

$$J_{\xi_1,\xi_2} J_{\xi_2,\xi_1} = J_{\xi_2,\xi_1} J_{\xi_1,\xi_2} = \boldsymbol{I} .$$

Za vektor $\xi_{ij} \in \mathcal{H}$, sada imamo

$$J_{\Omega_0} (\boldsymbol{I} \otimes E_{11}) J_{\Omega_0} (\sum_{ij} \xi_{ij} \otimes \eta_{ij}) = \xi_{11} \otimes \eta_{11} + \xi_{21} \otimes \eta_{21} =$$

$$= (\boldsymbol{I} \otimes F_{11})(\sum_{ij} \xi_{ij} \otimes \eta_{ij}) .$$

Zbog tog je

$$J_{\Omega_0} (\boldsymbol{I} \otimes E_{11}) J_{\Omega_0} = \boldsymbol{I} \otimes F_{11} ,$$

i slično

$$J_{\Omega_0} (\boldsymbol{I} \otimes E_{22}) J_{\Omega_0} = \boldsymbol{I} \otimes F_{22} .$$

No, $\boldsymbol{I}\otimes E_{21}$ je parcijalna izometrija, s početnom projekcijom $\boldsymbol{I}\otimes E_{11}$ i finalnom projekcijom $\boldsymbol{I}\otimes E_{22}$. Znači, $J_{\Omega_0}(\boldsymbol{I}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}$ mora biti parcijalna izometrija s početnom projekcijom $\boldsymbol{I}\otimes F_{11}$ i finalnom projekcijom $\boldsymbol{I}\otimes F_{22}$. Kako je

$$J_{\Omega_0}(\mathbf{I}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}\in\mathcal{N}'=\mathcal{M}'\otimes\mathcal{F},$$

to postoji unitarni element $U'\in\mathcal{M}'$ za koji vrijedi

$$J_{\Omega_0}(\boldsymbol{I}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}=U'\otimes F_{21}.$$

Dalje, za $\xi\in\mathcal{H}$, može se iskoristi Lema 3.34, i izračunati

$$(J_{\xi_2,\xi_1}\xi)\otimes\eta_{12} = J_{\Omega_0}(\xi\otimes\eta_{21})$$

$$= J_{\Omega_0}(\boldsymbol{I}\otimes E_{21})(\xi\otimes\eta_{11})$$

$$= J_{\Omega_0}(\boldsymbol{I}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}\,J_{\Omega_0}(\xi\otimes\eta_{11})$$

$$= (U'\otimes F_{21})(J_{\xi_1}\xi\otimes\eta_{11})$$

$$= (U'J_{\xi_1}\xi)\otimes\eta_{12}.$$

Dakle, $J_{\xi_2,\xi_1}=U'J_{\xi_1}$.

Adjungovanjem dobijamo $J_{\xi_1,\xi_2} = J_{\xi_1}U'^*$. Konačno, za $\xi\in\mathcal{H}$, je

$$(J_{\xi_2}\xi)\otimes\eta_{12} = J_{\Omega_0}(\xi\otimes\eta_{22})$$

$$= J_{\Omega_0}(\boldsymbol{I}\otimes E_{21})J_{\Omega_0}\,J_{\Omega_0}(\xi\otimes\eta_{12})$$

$$= (U'\otimes F_{21})(J_{\xi_1}U'^*\xi\otimes\eta_{21})$$

$$= (U'J_{\xi_1}U'^*\xi)\otimes\eta_{22}.$$

Prema tome,

$$J_{\xi_2}=\mathrm{U}'J_{\xi_1}\mathrm{U}'^*. \quad \square$$

Za svaki par vektora ξ_1,ξ_2, cikličkih i separirajućih za $\mathcal{M}$, označimo sa $\theta(\xi_2,\xi_1)$ unitaran element $U'\in\mathcal{M}'$ dobijen u Lemi 3.35.

Lema 3.36. *Ako su vektori* ξ_1 *i* ξ_2 *ciklički i separirajući za* $\mathcal{M}$ *i ako je* $U' \in \mathcal{M}'$ *unitaran element, onda je*

$$\theta(U'\xi_2, \xi_1) = U'\theta(\xi_2, \xi_1).$$

Dokaz. Za $A \in \mathcal{M}$ vrijedi

$$S_{U'\xi_2,\xi_1} A\xi_1 = A^* U'\xi_2 = U'A^*\xi_2 = U' S_{\xi_2,\xi_1} A\xi_1 .$$

Znači,

$$S_{U'\xi_2,\xi_1} = U' S_{\xi_2,\xi_1} .$$

Zbog toga je dalje

$$J_{U'\xi_2,\xi_1} = U' J_{\xi_2,\xi_1} .$$

Traženi rezultat sada slijedi iz Leme 3.35. □

Primjetimo da iz posljednje dvije leme slijedi da θ zadovoljava lančano pravilo

$$\theta(\xi_3, \xi_1) = \theta(\xi_3, \xi_2)\,\theta(\xi_2, \xi_1).$$

Lema. 3.37. *Ako je* ξ *ciklički i separirajući vektor za* $\mathcal{M}$*, onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\theta(\xi,\Omega) = \mathbf{I}$;

(ii) $\xi \in \mathcal{P}_\Omega$;

(iii) $\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_\Omega$.

Dokaz. (i)⇒(ii) Prema Lemi 3.35, iz $\theta(\xi,\Omega) = \boldsymbol{I}$, slijedi

$$J_\xi = J_\Omega = J_{\xi,\Omega} = J.$$

Stoga, za $A \in \mathcal{M}$, vrijedi

$$(\xi, Aj(A)\Omega) = (A^*\xi, j(A)\Omega)$$

$$= (S_{\xi,\Omega}A\Omega, JA\Omega)$$

$$= (J\Delta^{\frac{1}{2}}_{\xi,\Omega} A\Omega, JA\Omega)$$

$$= (A\Omega, \Delta^{\frac{1}{2}}_{\xi,\Omega} A\Omega) \geq 0 .$$

Tako ξ pripada dualnom konusu konusa $\mathcal{P}_\Omega$. Pošto je dualni konus konusa $\mathcal{P}_\Omega$ jednak $\mathcal{P}_\Omega$, znači, $\xi \in \mathcal{P}_\Omega$.

(ii)⇒(iii) Ova implikacija predstavlja Propoziciju 3.30.(2).

(iii)⇒(ii) Ova implikacija je trivijalna.

(ii)⇒(i) Ako $\xi \in \mathcal{P}_\Omega$ onda za svaki $A \in \mathcal{M}$ imamo

$$0 \leq (\xi, AJ_\Omega A\Omega) = (A^*\xi, J_\Omega A\Omega)$$

$$= (S_{\xi,\Omega}A\Omega, J_\Omega A\Omega) = (A\Omega, J_\Omega S_{\xi,\Omega}A\Omega)\,.$$

Dakle,

$$(\eta, J_\Omega S_{\xi,\Omega}\eta) \geq 0 \;\;,\;\; \eta \in \mathcal{D}(S_{\xi,\Omega}).$$

Prema Lemi 3.33 i Propoziciji 3.9, adjungovani operator operatora $S_{\xi,\Omega}$ je zatvorenje $F_{\xi,\Omega}$ preslikavanja

$$A'\Omega \mapsto A'^*\xi \;\;,\;\; A' \in \mathcal{M}'.$$

Na taj način, za $A \in \mathcal{M}$, dobijamo

$$J_\Omega F_{\xi,\Omega} J_\Omega A\Omega = J_\Omega F_{\xi,\Omega} J_\Omega A J_\Omega \Omega$$

$$= J_\Omega (J_\Omega A J_\Omega)^*\xi$$

$$= A^*\xi = S_{\xi,\Omega}A\Omega,$$

pri čemu smo iskoristili jednakost $J_\Omega\xi = \xi$.

Dakle,

$$S_{\xi,\Omega} \subseteq J_\Omega F_{\xi,\Omega} J_\Omega\,.$$

Na sličan način dobijamo

$$F_{\xi,\Omega} \subseteq J_\Omega\, S_{\xi,\Omega}\, J_\Omega\,,$$

i na osnovu toga

$$J_\Omega\, S_{\xi,\Omega} = F_{\xi,\Omega}\, J_\Omega\,.$$

Prema tome,

$$(J_\Omega S_{\xi,\Omega})^* = S_{\xi,\Omega}{}^* J_\Omega = F_{\xi,\Omega} J_\Omega = J_\Omega S_{\xi,\Omega}\,.$$

Ovim smo dokazali da je operator $J_\Omega\, S_{\xi,\Omega}$ pozitivan i hermitski. Iz jedinstvenosti polarne dekompozicije slijedi $J_\Omega = J_{\xi,\Omega}$ jer je $S_{\xi,\Omega} = J_\Omega(J_\Omega S_{\xi,\Omega})$.

Odavde i iz Leme 3.35, slijedi da je $\theta(\xi,\Omega) = \boldsymbol{I}$. □

Sljedećom lemom dokazuje se Teorema 3.31.(a) za gust skup formi u $\mathcal{M}_{*+}$.

Lema 3.38. *Neka je vektor* $\eta\in\mathcal{H}$ *ciklički i separirajući za* $\mathcal{M}$. *Tada postoji jedinstven vektor* $\xi\in\mathcal{P}$ *sa osobinom*

$$(\eta,\, A\eta) = (\xi,\, A\xi), \quad \text{za svako } A\in\mathcal{M}.$$

Dokaz. Neka je $U' = \theta(\eta,\Omega)$. Stavimo $\xi = U'^*\eta$. Kako je U' unitaran element algebre $\mathcal{M}'$, to je

$$(\eta,\, A\eta) = (\xi,\, A\xi)\ , \quad \text{za svako } A\in\mathcal{M}.$$

Uz to je, prema Lemi 3.36,

$$\theta(\xi,\Omega) = \theta(U'^*\eta,\Omega) = U'^*\theta(\eta,\Omega) = U'^*U' = \boldsymbol{I}\,,$$

pa, prema Lemi 3.37, zaključujemo da $\xi\in\mathcal{P}$.

Da bismo dokazali jedinstvenost, pretpostavimo da $\xi'\in\mathcal{P}$, gdje je $\omega_{\xi'} = \omega_\xi$.
Vektor ξ' je separirajući za $\mathcal{M}$ i odmah, prema Propoziciji 3.30, ciklički. Znači, $\theta(\xi',\Omega)$ je definisan. Budući da je $\omega_{\xi'} = \omega_\xi$, to postoji unitaran operator $U'\in\mathcal{M}'$ takav da je, prema Teoremi 1.17, $\xi' = U'\xi$.
Na osnovu toga i Leme 3.36, dobijamo

$$\theta(\xi',\Omega) = \theta(U'\xi,\Omega) = U'\theta(\xi,\Omega) = U'\,.$$

Kako $\xi'\in\mathcal{P}$, iz Leme 3.37. slijedi $U' = \boldsymbol{I}$ i otuda $\xi' = \xi$. □

Lema 3.39. *Skup pozitivnih formi* ω_η *, gdje je vektor* η *ciklički i separirajući za* $\mathcal{M}$*, je gust u normi u* $\mathcal{M}_{*+}$.

Dokaz. Ako $\omega\in\mathcal{M}_{*+}$, tada je ω, prema Teoremi 2.26, oblika

$$\omega(A) = \sum_n (\xi_n, A\xi_n)\ ,$$

pri čemu je $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$.

Svaki vektor ξ_n se može aproksimirati vektorom oblika $A_n'\Omega$, gdje $A_n'\in\mathcal{M}'$.

No, za $A \in \mathcal{M}_+$ imamo

$$(A_n{}'\Omega, AA_n{}'\Omega) = (A^{\frac{1}{2}}\Omega, A_n{}'^*A_n{}' A^{\frac{1}{2}}\Omega)$$

$$\leq \|A_n'\|^2 (\Omega, A\Omega) .$$

Prema tome, skup pozitivnih formi ω za koje je

$$\omega(A) \leq \alpha(\Omega, A\Omega) , \quad A \in \mathcal{M}_+$$

za neku konstantu α, je gust u normi u $\mathcal{M}_{*+}$.

Prema Teoremi 1.29, stanje ω ima oblik

$$\omega(A) = (A'\Omega, AA'\Omega), \quad \text{gdje je } A' \in \mathcal{M}_+{}'.$$

Sada svako $A' \in \mathcal{M}_+{}'$ možemo aproksimirati u normi nekim invertibilnim elementom $B' \in \mathcal{M}_+{}'$.

Stavimo $\eta = B'\Omega$ i dokažimo da je vektor η ciklički i separirajući za $\mathcal{M}'$.
Ako je $A\eta = 0$ za $A \in \mathcal{M}$, onda je $0 = (B')^{-1}A\eta = A(B')^{-1}\eta = A\Omega$.
Znači, iz $A\eta = 0$ slijedi $A = 0$, pa je vektor η separirajući za $\mathcal{M}$.
Ako je $A'\eta = 0$ za $A' \in \mathcal{M}'$, onda je $A'B' = 0$ i $A'B' = 0$. Iz invertibilnosti elementa B' slijedi da je $A' = 0$, pa je η separirajući vektor za $\mathcal{M}'$. Odavde i iz Propozicije 3.3, zaključujemo da je vektor η ciklički za $\mathcal{M}$. □

Za dokaz nejednakosti iz Teoreme 3.31, trebaće nam sljedeća lema.

Lema 3.40. *Stavimo* $\mathcal{H}_{sa} = \mathcal{P} - \mathcal{P}$, $\mathcal{M}_{sa} = \mathcal{M}_+ - \mathcal{M}_-$. *Tada je preslikavanje* $\Phi : \mathcal{M}_{sa} \to \mathcal{H}_{sa}$ *dato sa* $A \to \Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega$ *izomorfizam uređenja algebre* $\mathcal{M}_{sa}$ *na skupu vektora* $\xi \in \mathcal{H}_{sa}$ *takvih da je*

$$-\alpha\Omega \leq \xi \leq \alpha\Omega$$

za neku konstantu $\alpha > 0$ *(uređenja su inducirana konusima* $\mathcal{M}_+$ *i* $\mathcal{P}$*).*

Dokaz. Prema Propoziciji 3.26, $A \in \mathcal{M}_+$ povlači $\Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega \in \mathcal{P}$.

Obratno, ako je $A = A^*$ i $\Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega \in \mathcal{P}$, tada, za bilo koje $A' \in \mathcal{M}'$, vrijedi

$$(A'\Omega,\ AA'\Omega) = (A'^*A'\Omega,\ A\Omega) = (\Delta^{-\frac{1}{4}}|A'|^2\ \Omega,\ \Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega) \geq 0.$$

Dakle, $A \geq 0$.
Na taj način smo pokazali da je $\Phi : \mathcal{M}_{sa} \to \Phi(\mathcal{M}_{sa})$ izomorfizam uređenja.

Pokažimo da je preslikavanje Φ $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)$-$\sigma(\mathcal{H},\mathcal{H})$-neprekidno ($\sigma(\mathcal{H},\mathcal{H})$ označava slabu topologiju na $\mathcal{H}$). Za $A \in \mathcal{M}$, imamo:

$$(\boldsymbol{I} + \Delta^{\frac{1}{2}})A\Omega = A\Omega + JA^*\Omega\ ;$$

$$A\Omega = (\boldsymbol{I} + \Delta^{\frac{1}{2}})^{-1}\ (A\Omega + JA^*\Omega)\ ;$$

$$\Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega = (\Delta^{\frac{1}{4}} + \Delta^{-\frac{1}{4}})^{-1}(A\Omega + JA^*\Omega)\ .$$

Odavde, za $\eta \in \mathcal{H}_{sa}$, dobijamo

$$(\eta\, \Delta^{\frac{1}{4}} A\Omega) = ((\Delta^{\frac{1}{4}} + \Delta^{-\frac{1}{4}})^{-1}\eta,\ A\Omega + JA^*\Omega)\ .$$

Kako je $\left\|(\Delta^{\frac{1}{4}} + \Delta^{-\frac{1}{4}})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2}$, iz prethodnog slijedi neprekidnost preslikavanja Φ, što je trebalo dokazati.

Pretpostavimo da je $-\alpha\Omega \leq \xi \leq \alpha\Omega$. Neće se izgubi se na opštosti ako se pretpostavi da je $0 \leq \xi \leq \Omega$ (što se može postići normalizacijom vektora ξ).
Stavimo

$$\xi_n = f_n(\ln\Delta)\xi\ , \quad \text{gdje je } f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2n^2}}\ .$$

Tada $\xi_n \in \mathcal{D}(\Delta^\beta)$, za sve $\beta \in \mathbb{C}$ i, prema Propoziciji 3.26(3), vrijedi

$$0 \leq \xi_n = f_n(\ln\Delta)\xi \leq f_n(\ln\Delta)\Omega = \Omega\ .$$

Znamo da, za svako $A' \in \mathcal{M}'$, $\Delta^{\frac{1}{4}} A'\Omega \in \mathcal{P}$. Zbog toga je

$$(\Delta^{-\frac{1}{4}}\xi_n,\ A'\Omega) = (\xi_n,\ \Delta^{-\frac{1}{4}} A'\Omega) \geq 0\ .$$

Odavde i iz Propozicije 3.27, slijedi

$$\Delta^{-\frac{1}{4}}\xi_n \in \overline{\mathcal{M}'_+\Omega}^{\vee} = \overline{\mathcal{M}_+\Omega}\ .$$

Na sličan način bismo zaključili i da je

$$\Omega - \Delta^{-\frac{1}{4}}\xi_n = \Delta^{-\frac{1}{4}}(\Omega - \xi_n) \in \overline{\mathcal{M}_+\Omega}\ ,$$

tako da, za $A' \in \mathcal{M}_+'$, dobijamo

$$0 \leq (\Delta^{-\frac{1}{4}} \xi_n, A'\Omega) \leq (\Omega, A'\Omega) .$$

Prema Propoziciji 3.27(1), postoji operator $A_n \in \mathcal{M}$ takav da je $0 \leq A_n \leq \boldsymbol{I}$ i

$$\Delta^{-\frac{1}{4}} \xi_n = A_n\Omega ,$$

i zbog toga $\xi_n \in \mathcal{B}$, gdje je

$$\mathcal{B} = \{\Phi(A) : A \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}} ,\quad 0 \leq A \leq \boldsymbol{I}\} .$$

S obzirom da je skup $\{A : A \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}} , 0 \leq A \leq \boldsymbol{I}\}$ σ-slabo zatvoren, pa tako i σ-slabo kompaktan podskup jedinične kugle $\mathcal{M}_1$, u $\mathcal{M}$, i s obzirom da je preslikavanje Φ $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)$-$\sigma(\mathcal{H},\mathcal{H})$-neprekidno, slijedi da je skup $\mathcal{B}$ $\sigma(\mathcal{H},\mathcal{H})$-kompaktan.

Znači, $\xi = \lim_n \xi_n \in \mathcal{B}$. □

Lema 3.41. *Za vektore* $\xi, \eta \in \mathcal{P}$ *vrijede sljedeće nejednakosti*

$$\|\xi - \eta\|^2 \leq \|\omega_\xi - \omega_\eta\| \leq \|\xi - \eta\| \cdot \|\xi + \eta\| .$$

Dokaz. Druga nejednakost vrijedi za sve $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, jer je

$$(\omega_\xi - \omega_\eta)(A) = \tfrac{1}{2} [(\xi - \eta), A(\xi + \eta)) + (\xi + \eta, A(\xi - \eta))] .$$

Da bismo dokazali prvu nejednakost, pretpostavimo da je vektor $\xi+\eta$ ciklički i separirajući . Kako $\xi+\eta \in \mathcal{P}$, to prema Propoziciji 3.30.(2), vrijedi $\mathcal{P}_{\xi+\eta} = \mathcal{P}$. Također je

$$-(\xi+\eta) \leq \xi - \eta \leq (\xi+\eta) .$$

Primjenom Leme 3.40, u kojoj smo stavili $\Omega = \xi+\eta$, zaključujemo da postoji hermitski operator $A \in \mathcal{M}$, takav da vrijedi

$$-\boldsymbol{I} \leq A \leq \boldsymbol{I}$$

i

$$\xi - \eta = \Delta_{\xi+\eta}^{\frac{1}{4}} A(\xi+\eta) .$$

Odavde slijedi da je

$$\|\omega_\xi - \omega_\eta\| \geq (\omega_\xi - \omega_\eta)(A) =$$

$$= (\xi, A\xi) - (\eta, A\eta)$$

$$= Re(\xi-\eta, A(\xi+\eta))$$

$$= (\xi-\eta, \Delta_{\xi+\eta}^{-\frac{1}{4}}(\xi-\eta)) .$$

Kako je $J(\xi-\eta) = \xi-\eta$ i $J\Delta_{\xi+\eta}^{-\frac{1}{4}} = \Delta_{\xi+\eta}^{\frac{1}{4}} J,$ dobijamo

$$(\xi-\eta, \Delta_{\xi+\eta}^{-\frac{1}{4}}(\xi-\eta)) = (\xi-\eta, \Delta_{\xi+\eta}^{\frac{1}{4}}(\xi-\eta)) .$$

Na taj način dolazi se do nejednakosti

$$\|\omega_\xi - \omega_\eta\| \geq (\xi-\eta, \tfrac{1}{2}(\Delta_{\xi+\eta}^{\frac{1}{4}} + \Delta_{\xi+\eta}^{-\frac{1}{4}})(\xi-\eta)) \geq \|\xi-\eta\|^2,$$

jer je $\frac{1}{2}(\Delta_{\xi+\eta}^{\frac{1}{4}} + \Delta_{\xi+\eta}^{-\frac{1}{4}}) \geq \boldsymbol{I}$.

Sada, za opće ξ, η iz $\mathcal{P}$, možemo naći nizove $A_n', B_n' \in \mathcal{M}_+'$ cijelih analitičkih elemenata za σ' takvih da je

$$\xi_n = \Delta^{-\frac{1}{4}} A_n'\Omega \to \xi$$

$$\eta_n = \Delta^{-\frac{1}{4}} B_n'\Omega \to \eta.$$

Dodavanjem $\varepsilon_n\boldsymbol{I}$ operatorima A_n' i B_n' može se pretpostaviti da je $A_n' \geq \varepsilon_n\boldsymbol{I} > 0$ i $B_n' \geq \varepsilon_n\boldsymbol{I} > 0$. Tada je $A_n' + B_n' > 2\varepsilon_n\boldsymbol{I}$, tako da su $A_n' + B_n'$ invertibilni, a otuda slijedi da su vektori

$$\xi_n + \eta_n = \Delta^{-\frac{1}{4}}(A_n' + B_n')\Omega$$

separirajući i ciklički za $\mathcal{M}$.

Znači,

$$\|\omega_{\xi_n} - \omega_{\eta_n}\| \geq \|\xi_n - \eta_n\|^2 .$$

Prelaskom na limes dolazi se do prve nejednakosti leme. □

Kraj dokaza Teoreme 3.31.
U prethodnim lemama smo dokazali Teoremu 3.31.
Zaista, dio (b) Teoreme 3.31. dat je Lemom 3.41, dok dio (a) Teoreme 3.31. slijedi iz dijela (b) Leme 3.38 i iz Leme 3.39.

Dokaz Korolara 3.32.

Neka je $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ automorfizam i neka je $\xi \in \mathcal{P}$ vektor koji predstavlja stanje

$$A \mapsto (\Omega, \alpha^{-1}(A)\Omega) ,$$

tj.

$$(\xi, A\xi) = (\Omega, \alpha^{-1}(A)\Omega).$$

Tada je vektor ξ separirajući za $\mathcal{M}$, a otuda, prema Propoziciji 3.30, i ciklički za $\mathcal{M}$.

Definišimo operator $U = U(\alpha)$ na $\mathcal{M}\Omega$ sa

$$UA\Omega = \alpha(A)\xi .$$

Tada vrijedi

$$\|UA\Omega\|^2 = (\xi, \alpha(A^*A)\xi) = (\Omega, A^*A\Omega) = \|A\Omega\|^2 .$$

Uzimajući zatvorenje, operator U možemo proširiti do izometrije koju ćemo ponovo označiti sa U. Budući da je vektor ξ ciklički i separirajući za $\mathcal{M}$, rang izometrije U je gust skup i stoga je U unitaran, a $U^* = U^{-1}$, tj.

$$U^*A\xi = \alpha^{-1}(A)\Omega .$$

Sada, za $A, B \in \mathcal{M}$, vrijedi

$$UAU^*B\xi = UA\alpha^{-1}(B)\Omega$$

$$= \alpha(A\alpha^{-1}(B))\xi = \alpha(A)B\xi .$$

Znači,

$$\alpha(A) = UAU^* , \quad A \in \mathcal{M} ,$$

što dokazuje svojstvo (a) za $U(\alpha) = U$.

Primjetimo, dalje, da vrijedi

$$SU^*A\xi = S\alpha^{-1}(A)\Omega$$

$$= \alpha^{-1}(A)^*\Omega$$

$$= \alpha^{-1}(A^*)\Omega$$

$$= U^*A^*\xi$$

$$= U^*S_\xi A\xi .$$

Uzimajući zatvorenje operatora dobijamo

$$J\Delta^{\frac{1}{2}}\, U^* = U^*J_\xi \Delta_\xi^{\frac{1}{2}} = U^*J\Delta_\xi^{\frac{1}{2}} ,$$

ili

$$UJU^*U\Delta^{\frac{1}{2}}\, U^* = J\Delta_\xi^{\frac{1}{2}} .$$

Iz jedinstvenosti polarne dekompozicije slijedi da je $UJU^* = J$, što je ekvivalentno jednakosti

$$[U, J] = 0 .$$

Time je dokazano svojstvo (c).

Koristeći sada svojstva (a) i (c), za $A \in \mathcal{M}$, dobijamo

$$UAj(A)\Omega = \alpha(A)j(\alpha(A))\xi.$$

S obzirom da $\xi \in \mathcal{P}$, iz Propozicije 3.26.(5) i iz Propozicije 3.30.(2), zaključuje se da je

$$\mathrm{U}\mathcal{P} = \mathcal{P}.$$

Ako $\varphi \in \mathcal{M}_{*+}$ tada, vrijedi

$$\begin{aligned}(U\xi(\varphi), AU\xi(\varphi)) &= (\xi(\varphi), U^*AU\xi(\varphi)) \\ &= (\xi(\varphi), \alpha^{-1}(A)\xi(\varphi)) \\ &= \varphi(\alpha^{-1}(A)) \\ &= (\alpha^{-1}{}^*(\varphi))(A) \\ &= (\xi(\alpha^{-1}{}^*(\varphi)), A(\xi(\alpha^{-1}{}^*(\varphi))) ,\end{aligned}$$

za sve $A \in \mathcal{M}$.
Zbog jedinstvenosti prikaza vektora u konusu $\mathcal{P}$, dobijamo

$$U(\alpha)\xi(\varphi) = \xi(\alpha^{-1}{}^*(\varphi)) .$$

Ovim smo dokazali svojstvo (b) i istovremeno dokazali da je $\alpha \mapsto U(\alpha)$ reprezentacija i da je $U(\alpha)$ jedinstveno.

Neprekidnost preslikavanja $\alpha \mapsto U(\alpha)$ i $U(\alpha) \mapsto \alpha,$ u različitim topologijama, opisanim u korolaru, slijedi iz Teoreme 3.31.(b) i iz činjenice da je

$$\|U(\alpha) - U(\beta)\| = \|(U(\alpha) - U(\beta))_{\mathcal{P}}\| .$$

Posljednja jednakost proizilazi iz činjenice da svaki vektor $\psi \in \mathcal{H}$ ima jedinstvenu dekompoziciju (Propozicija 3.28.) :

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 + i(\psi_3 - \psi_4)\,,$$

gdje $\psi_i \in \mathcal{P}$, $\psi_1 \perp \psi_2$, $\psi_3 \perp \psi_4$ i $U(\alpha)$ uvažava ovu dekompoziciju.

Jednakost slabe, jake i jake* topologije, na unitarnoj grupi $U(\mathcal{H})$, na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, proizilazi iz jednakosti

$$\|(V-U)\psi\|^2 = ((V-U)\psi,\ (V-U)\psi)$$

$$= 2\|\psi\|^2 - (V\psi,\ U\psi) - (U\psi,\ V\psi)\,.$$

Znači, ako $V \to U$ slabo, tada $V \to U$ jako, i analogno $V^* \to U^*$ jako. Time je korolar dokazan. □

3.5. PRIMJENE MODULARNE TEORIJE TOMITA-TAKESAKI U KVANTNOJ MEHANICI

Modularna teorija Tomita-Takesaki pronašla je mnoge primjene u kvantnoj teoriji polja i kvantnoj statističkoj mehanici. Modularna grupa automorfizama zadovoljava tzv. KMS-uslov, osobinu fizičkog značaja u kvantnoj teoriji mnogočestičnih sistema koja uključuje kvantnu statističku mehaniku i kvantnu teoriju polja. Pod takvim okolnostima, za odgovrarajuću algebru $\mathcal{M}$ i stanje ω, grupa automorfizama $\{\sigma_{\beta t}\}$ predstavlja vrijeme razvoja sistema koji zadovoljava modularni uslov. Dakle, s jedne strane $\{\sigma_{\beta t}\}$ je modularna grupa automorfizama para $(\mathcal{M},\Omega)$, a sa druge strane ω je stanje ravnoteže za inverznu temperaturu β.

Proučavanjem pomenutih karakteristika, uočeno je da modularni objekti Δ^{it}, J, određenih algebri opservabli i stanja šifriraju dodatne fizikalne informacije. Naime 1975. godine uočeno je da unitarna grupa $\{\Delta^{it}\}$ implementira grupu posebnih Lorentzovih transformacija, tzv. Lorentzovih pojačivača, koja oblasti oblika klina u prostoru Minkowskog ostavljaju invarijantim. Ova osobina je nazvana modularna kovarijansa. Modularna konjugacija ili modularna involucija J implementira refleksiju prostor-vremena oko ivice klina.Ovo otkriće je intenziviralo dalja istraživanja u okviru kvantne teorije.

U nastavku ovog poglavlja osvrnućemo se na neke veze modularne teorije i kvantne statističke mehanike, te kvantne teorije polja.

KMS uslov

Modularna grupa automorfizama zadovoljava *Kubo–Martin–Schwinger (KMS)* uslov koji se u matematičkoj fizici, preciznije statističkoj mehanici i kvantnoj teoriji polja, koristi za karakterizaciju stanja temperaturne ravnoteže kvantnih sistema.

Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra i $\{\alpha_t | t \in \mathbb{R}\}$ $\sigma(X,F)$-slabo neprekidna jednoparametarska grupa automorfizama algebre $\mathcal{M}$. Stanje Φ zadovoljava KMS uslov za (inverznu temperaturu) β $(0 < \beta < \infty)$ u odnosu na grupu $\{\alpha_t | t \in \mathbb{R}\}$, ako za bilo koje $A,B \in \mathcal{M}$ postoji kompleksna funkcija $f_{A,B}(z)$, analitička na traci $\{z \in \mathbb{C} | 0 < \mathrm{Im} z < \beta\}$ i neprekidna na njenom zatvorenju, takva da je

$$f_{A,B}(t) = \Phi(\alpha_t(A)B)$$

i

$$f_{A,B}(t + i\beta) = \Phi(B\alpha_t(A))$$

za sve t $\in \mathbb{R}$. Takvo stanje Φ ćemo nazivati KMS-stanjem.

U ovom slučaju je

$$\Phi(\alpha_{i\beta}(A)B) = \Phi(BA),$$

za sve A, B koji pripradaju σ(X,F)-slabo gustoj, α-invarijantnoj *-podalgebri algebre $\mathcal{M}$.
Takva KMS stanja su α-invarijantna, odnosno vrijedi,

$$\Phi(\alpha_t(A)) = \Phi(A) \text{ za sve } A, B \in \mathcal{M} \text{ i } t \in \mathbb{R},$$

i pored toga su stabilna i pasivna.
Svako vjerno normalno stanje zadovoljava KMS uslov za $\beta = 1$ u odnosu na odgovarajuću modularnu grupu automorfizama. U nastavku ćemo ovaj uslov nazivati modularnim uslovom.

Teorema 3.33. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra sa cikličkim i separirajućim vektorom Ω. Tada indukovano stanje ω na $\mathcal{M}$ zadovoljava modularni uslov u odnosu na modularnu grupu $\{\sigma_t \mid t \in R\}$ automorfizama asociranu paru ($\mathcal{M}$, Ω).*

Dakle, modularna grupa automorfizama je obdarena analitičnošću povezanom sa KMS-uslovom, a to je moćan alat u mnogim primjenama modularne teorija u matematičkoj fizici. Osim toga, na fizikalna svojstva i tumačenja KMS-uslova često se poziva kod primjene modularne teorije u kvantnoj fizici. KMS uslov za modularnu grupu automorfizama obezbjeđuje vezu između vrijednosti $\omega(AB)$ i $\omega(BA)$, za sve $A,B \in \mathcal{M}$.
Treba napomenuti da je modularni uslov restriktivan. Naime, samo modularna grupa može zadovoljiti modularni uslov za ($\mathcal{M}$,Ω), a modularna grupa za jedno stanje može zadovoljiti modularni uslov samo za stanja koja se razlikuju od prvobitnog djelovanjem elementa iz centra algebre $\mathcal{M}$.

Teorema 3.34. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra sa cikličkim i separirajućim vektorom Ω i neka je $\{\sigma_t\}$ odgovarajuća modularna grupa automorfizama. Ako indukovano stanje ω zadovoljava modularni uslov u odnosu na grupu $\{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ automorfizama algebre,* *tada se $\{\alpha_t\}$ mora podudariti sa $\{\sigma_t\}$. Osim toga, normalno stanje ψ na $\mathcal{M}$ zadovoljava modularni uslov u odnosu na $\{\sigma_t\}$ ako i samo ako*

$$\psi(\cdot) = \omega(h\cdot) = \omega\left(h^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}}\right)$$

za neki jedinstven pozitivan injektivan operator h asociran centru algebre $\mathcal{M}$.

Pozitivna energija
Razvoj (promjena) sistema u vremenu se u kvantnoj fizici često predstavlja kao jako neprekidna grupa $\{U(t) = e^{itH} \mid t \in \mathbb{R}\}$ unitarnih operatora, dok se genearator H interpretira kao sveukupna energija sistema. Postoji veza između modularne strukture i pozitivne energije, što je u osnovu mnogih primjena u kvantnoj teoriji polja.

Sljedeća teorema koju navodimo bez dokaza motivisana je pomenutim otkrićima iz 1975. godine:

Teorema 3.35. *Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra sa cikličkim i separirajućim vektorom Ω i neka je $\{U(t)\}$ neprekidna unitarna grupa za koju vrijedi $U(t)\mathcal{M}U(-t) \subset \mathcal{M}$, za sve $t \geq 0$.*
Tada bilo koja dva od sljedećih uslova implicira treći:

(1) $U(t) = e^{itH}$, $H \geq 0$,

(2) $U(t)\Omega = \Omega$, za sve $t \in R$,

(3) $\Delta^{it}\, U(s)\, \Delta^{-it}$, $= U(e^{-2\pi t} s)$ i $JU(s)J = U(-s)$, za sve $s, t \in R$.

Modularna nukleranost i osobine faznog prostora
Modularna teorija se može koristiti za izražavanje fizikalno smislenih osobina kvantnih „faznih prostora“ pomoću uslova kompaktnosti i nuklearnosti određenih presilkavanja.

Neka je $O_1 \subset O_2$ neprazan ograničen otvoren podprostor prostora Minkowskog sa odgovarajućom algebrom opservabli $\mathcal{A}(O_1) \subset \mathcal{A}(O_2)$ i neka je modularni operator asociran sa $\mathcal{A}(O_2)$ (koji je ciklički i separirajući za $\mathcal{A}(O_2)$).
Za svaki $\lambda \in (0, 1/2)$ definišimo preslikavanje $\Xi_\lambda : \mathcal{A}(O_1) \to \mathcal{H}$ na sljedeći način

$$\Xi_\lambda(A) = \Delta^\lambda A\Omega.$$

Kompaktnost bilo kojeg od ovih preslikavanja implicira kompaktnost svih ostalih. Osim toga, l^p norme ovih preslikavanja su međusobno povezane i daju mjeru lokalnih stepena slobode sistema. Kompaktnost i normiranost ovih preslikavanja povlače uslov jake statističke nezavisnosti koji se naziva osobina razdvajanja. Obrnuto, osobina razdvajanja implicira kompaktnost svih preslikavanja. Štaviše, egzistencija stanja temperaturne ravnoteže u globalnoj algebri opservabli može se izvesti iz pogodnih uslova pomenutih normi.

Geometrijsko modularno dejstvo

Modularni objekti u kvantnoj teoriji polja, asocirani sa oblastima oblika klina i vakuumskim stanjima u prostoru Minkowskog, imaju geometrijsko značenje nazvano geomterijsko modularno dejstvo. Ova činjenica izvorno je data u okviru aksioma Wightmana.

Postoje dva načina proučavanja geometrijskog modularnog dejstva u kvantnoj teoriji polja. Prvi se zasniva na modularnoj kovarijansi, a drugi na na modularnim involucijama.

Ovdje ćemo dati kratak osvrt na drugi način razmatranja geometrijskog modularnog dejstva.

U ovom pristupu ne pretpostavlja se a priori veza između modularnih objekata, a izometrije prostor-vremena se podrazumijevaju. Glavna pretpostavka je da uz dati vektor stanja Ω i von Neumannove algebre $\mathcal{A}(O)$ lokalizovanih opservabli na prostor-vremenu, postoji familija $\mathcal{W}$ podskupova prostor-vremena takvih da je

$$J_{W_1}R(W_2)J_{W_1} \in \{\mathcal{R}(W) | \ W \in \mathcal{W}\}, \text{ za svaki } W_1, W_2 \in \mathcal{W}.$$

Ovaj se uslov eksplicitno ne odnosi na izometrije niti druge specijalne osobine pa se može primjeniti na opće zakrivljeno prostor-vrijeme u kvantnoj teoriji polja.

Za određeno prostor-vrijeme, uključujući i prostor Minkowskog, pod određenim dodatnim tehničkim pretpostavkama, modularna involucija sadrži dovoljno podataka za determinisanje dinamike sistema, grupe izometrija prostor-vremena, i neprekidne unitarne reprezentacije grupe izometrija koja djeluje kovarijantno na opservable ostavljajući stanja invarijantna. U posebnim slučajevima, uključujući i slučaj prostora Minkowskog, moguće je izvesti samo prostor-vrijeme pomoću grupe J generisane modularnim involucijama $\{J_W | \ W \in \mathcal{W}\}$.

LITERATURA

[1] Araki, H. (1999) *Mathematical Theory of Quantum Fields,* Oxford University Press

[2] Arveson, W. (1976) *An Invitation to C*-Algebras,* Springer-Verlag, New York,

[3] Bingren, L. (1999) Real Tomita-Takesaki Theory, *Chinese Annals of Mathematics*, Vol.20, No.4, www.worldscinet.com

[4] Bratteli, O., Robinson, D. W. (1987) *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I,* Springer, New York, 2nd edition

[5] Dunford, N., Schwartz, J. T. (1963) *Linear Operators II,* Interscience Publishers, New York-London

[6] Emch, G. G. (1972) *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quanntum Field Theory,* Willey-Interscience, New York

[7] Gallavotti, G., Pulvirenti, M. (1976) Classical KMS Condition and Tomita-Takesaki Theory, *Commun. math. Phys*. 46, pp.1-9

[8] Gelfand, I. M., Vilenkin, N. J. (1961) *Some Aplications of Harmonic Analysis. Hilbert spaces,* rusko izdanje, Moskva, 1961.

[9] Goldberg, R. (1961) *Fourier Transforms,* University Press, Cambridge,

[10] Halmos, P. R. (1982) *A Hilbert Space Problem Book,* Springer-Verlag, New York, second edition

[11] Kurepa, S. (1990) *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora,* Školska knjiga, Zagreb

[12] Pjanić, K. (2005) *Von Neumannove algebre i modularna teorija Tomita-Takesaki,* magistarski rad, Univerzitet u Istočnom Sarajevu

[13] Pjanić, K. (2007) On functional equation $U_t + U_{-t} = V_t + V_{-t}$ on Banach space, *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol 16, Sarajevo 2007, pp.241-248

[14] Rudin, W. (1973) *Functional Analysis,* McGraw-Hill, New York

[15] Sakai, S. (1998) *C*-Algebras and W*-Algebras,* Springer, Berlin

[16] Schlingemann, D. (1999) *Application of Tomita-Takesaki theory in algebraic euclidean field theories,* http/arxiv.org/abs

[17] Sherman, D. (2003) *Introduction to the modular theory of von Neumann*

algebras: Tomita's Theorem, RAP Seminar on non-comutative L_spaces, http//www. math uiuc.edu/

[18] Shulman, V. S. (1997) Quasivectors and Tomita-Takesaki Theory for Operator Algebras on Π_1 –Spaces, Reviews in Mathematical Physics, Vol. 9, No 6, World Scientific Publising Company

[19] Summers, S. J. (2005) *Tomita–Takesaki Modular Theory, arXiv:math-ph/0511034v1*

[20] Takesaki, M. (1979) *Theory of Operator Algebras I,* Springer-Verlag, New York

[21] Takesaki, M. (2003) *Theory of Operator Algebras II,* Springer, Berlin

[22] Takesaki, M. (1970) *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications,* Springer-Verlag, Berlin-New York

[23] Vajzović, F. (1972) *Funkcionalna analiza, predavanja na III stepenu studija matematike,* Sarajevo

[24] Vuković, M. (2003) *Teorija grupa i reprezentacija s primjenama u fizici,* Univerzitetska knjiga, Sarajevo